

振動台上の実験箱における振動特性に関する一考察

澤田 知之*・能町 純雄**・近藤 崇***

A Study for Vibration Behavior of Sand-Box on the Shaking Table

Tomoyuki SAWADA, Sumio G. NOMACHI and Takashi KONDO

要 旨

本報告は、既往発表^{1)～3)}に於ける解析結果において仮定した固有の円振動角速度 ω に於ける解析法の一考察を報告するものである。

Abstract

Adding to the previous paper, in which the numerical analysis of displacements and moments for the each axis had been discussed, we try to prove ω to be peculiar value to the sand-box on shaking table, in this paper.

1. ま え が き

著者等は、振動台上に設置された試験機（箱）に対しての2次元弾性論による動的解析を行い、その試験機のもつ特性から、それによって導き出される曲げモーメンやせん断力、変位などの値を計算・検討してきた。その結果、振動台や試験機の固有の性質、動かした際の装置全体の分解能の検討、つまり固有振動数の有無とその範囲等の検証を進めている。又、既往発表1)～3)でも述べているように様々な着目点からモデル地盤による振動台実験を行った結果、共振現象と考えられる結果が表れ、その信頼性、整合性をさらに検討する必要に迫られた。

本報告では、試験機・実験箱のもつ固有の円振動角速度 ω に注目し、その解析方法についての一考察を述べる。

1. 解 析 概 要

今、既往発表から、図－1示す解析対象について以下のような基本微分方程式求められている。

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \omega^2 u_0 \sin \omega t \tag{1}$$

ここで、 ω (radian/sec) は入力加速度で固有の円振動角速度である。

* 教 授 環境都市工学科
** 名誉教授 北海道大学
*** 助 手 環境都市工学科

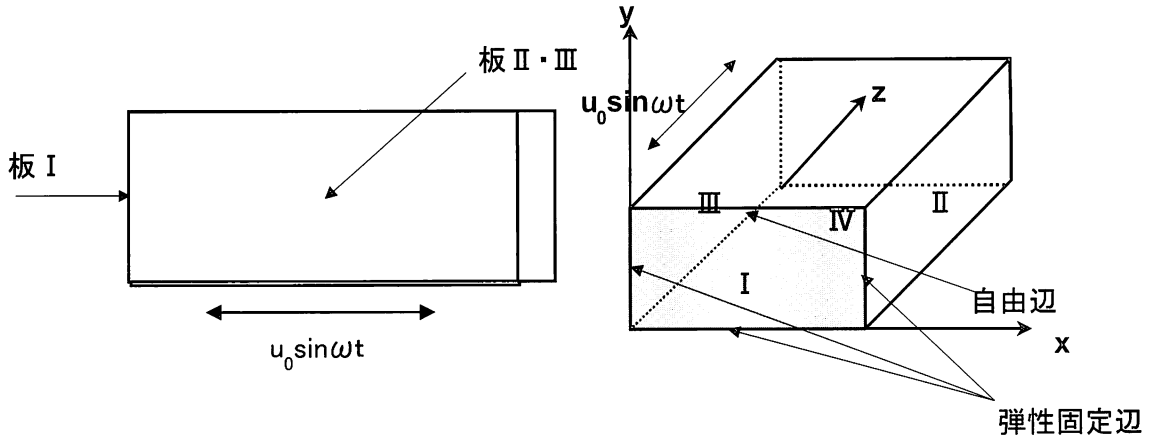


図-1 解析一般図

板のたわみを w , 振動台の入力変位を $u_0 \sin \omega t$ とする。今, 振動台による板 I の応答を考えると, 板 I は側板 II, III と底板 IV と接合され, 上辺は自由辺となっている。

よって図-1の板 I では, 板のたわみを w とすると既発表¹⁾より(1)式に $\sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y$ (Integration kernel) 積分核とする積分変換を施せば, その逆変換として, 次の強制振動解が得られる。

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{4}{ab} \sum_m \sum_n \frac{\sin \omega t \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y}{D \cdot \Omega_{mn}} \left[\frac{ab \rho h u_0 \omega^2 (1 - (-1)^m) (1 - (-1)^n)}{\pi^2 mn} \right. \\
 & + \frac{m\pi}{a} \left\{ (-1)^m S_n \left[(\overline{M}_x)_{x=a} \right] - S_n \left[(\overline{M}_x)_{x=0} \right] \right\} + D \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 + (2 - \nu) \frac{m\pi}{a} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \\
 & \times \left\{ (-1)^m S_n \left[\overline{w}_{ay} \right] - S_n \left[\overline{w}_{by} \right] \right\} + D \left\{ \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 + (2 - \nu) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) \right\} \\
 & \times \left\{ (-1)^n S_m \left[\overline{w}_{xb} \right] - S_m \left[\overline{w}_{xa} \right] \right\} \left. \right] \quad (2)
 \end{aligned}$$

ここで,

$$\Omega_{mn} = \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 - \frac{\omega^2 \rho h}{D} = \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 - \lambda^2 \quad (3)$$

また上式中, ω は(1)式と同様な円振動角速度である。

$$\overline{M}_x \sin \omega t = M_x, \quad \overline{w}_a \sin \omega t = w_a, \quad \overline{w}_b \sin \omega t = M_b, \quad \lambda^2 = \omega^2 \rho h / D$$

$$S_n \left[(\overline{M}_x)_{x=a} \right] = \int_0^b (\overline{M}_x)_{x=a} \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y dy$$

$$S_n \left[\overline{w}_a \right] = \int_0^b \overline{w}_a \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y dy$$

$$S_n \left[(\overline{M}_y)_{y=b} \right] = \int_0^a (\overline{M}_y)_{y=b} \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x dx$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{整数}$$

従って, (2)式は $w = \overline{w} \sin \omega t$ とおいて

$$\begin{aligned}
 w = & A_n \frac{1}{b\lambda} P_n(1 - \xi) - A'_n \frac{b}{\pi^2} Q_n(\xi) + (1 - \nu) \frac{1}{b\lambda} P_n(\xi) \\
 & + \left\{ B_m (P_m(\eta) + P_m(1 - \eta)) + B'_m (P_m(\eta) - P_m(1 - \eta)) \right\} \frac{1}{a\lambda} \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{\rho h u \omega^2}{D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(m\pi\xi) \cdot \sin(n\pi\eta) \cdot (1-(-1)^m) \cdot (1-(-1)^n)}{\pi^2 m n \cdot \Omega_{mn}}$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi b} \sum_m \sin(m\pi\xi) \cdot (-1)^m \left(\frac{m}{m^2 + \mu_n^2} + \frac{m}{m^2 + \mu_n'^2} \right) \\ &= -\frac{1}{b} \left(\frac{\sinh(\pi\mu_n\xi)}{\sinh(\pi\mu_n)} - \frac{\sinh(\pi\mu_n'\xi)}{\sinh(\pi\mu_n')} \right) = \frac{1}{b} Q_n(\xi) \end{aligned} \quad (5)$$

同じく

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\pi b \lambda} (1-\nu) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \sum_m \sin(m\pi\xi) \cdot (-1)^m \left(\frac{m}{m^2 + \mu_n^2} + \frac{m}{m^2 + \mu_n'^2} \right) \\ &= \frac{2(1-\nu)}{\pi b \lambda} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \left(\frac{\sinh(\pi\mu_n\xi)}{\sinh(\pi\mu_n)} - \frac{\sinh(\pi\mu_n'\xi)}{\sinh(\pi\mu_n')} \right) = -\frac{(1-\nu)}{b \lambda} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cdot P_n(\xi) \end{aligned} \quad (6)$$

B_m, B'_m に伴う級数の Closed Form は, $(1-(-1)^n)$ が B_m , $(1+(-1)^n)$ が B'_m に対応する。
次に, n についての Closed Form は以下の如く示される。

$$\therefore \frac{4}{ab} \sum_n \frac{\frac{n\pi}{b} \cdot \sin(n\pi\eta)}{\Omega_{mn}} = \frac{1}{a\lambda} \left(\frac{\sinh\{\pi\gamma_m(1-\eta)\}}{\sinh(\pi\gamma_m)} - \frac{\sinh\{\pi\gamma'_m(1-\eta)\}}{\sinh(\pi\gamma'_m)} \right) = P_m(\eta) \frac{1}{a\lambda} \quad (7)$$

$$\therefore \frac{4}{ab} \sum_n \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \cdot \frac{n\pi}{b} \{1 \mp (-1)^n\}}{\Omega_{mn}} = (P_m(\eta) \pm P_m(1-\eta)) \frac{1}{a\lambda} \quad (8)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m^2 \\ \gamma_m'^2 \end{aligned} \right\} = \beta_m^2 \mp \frac{\lambda b^2}{\pi^2}, \quad \beta_m = \frac{bm}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}$$

又, 振動台の入力変位を $u_0 \sin \omega t$ とすると, 振動台による板 I の応答を考えると, 板 I は側板 II, III と底板 IV と接合され, 上辺 ($x=a$) は自由辺となっている。

板 I の x, y 方向断面の直応力による曲げモーメントを M_x, M_y とし, セン断力によるモーメントを M_{xy} とすれば,

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (10)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

$$R_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

$$\text{ただし, } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

E : 板の弾性係数 (kgf/cm²)

h : 板厚 (cm)

ν : 板のポアソン比

2. ω の解析概要

図-1等から、本解析用いる境界条件は次の4条件である。

$y=b$: 弾性固定辺

$$M_x=0 \quad (13)$$

$$R_x=0 \quad (\text{ただし, } \xi=1.0) \quad (14)$$

$y=0$ で底板との接合を次のように仮定する。

$$M_x=K_0 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{ただし, } \xi=0) \quad (15)$$

$x=0$, a で側板との接合部を上式にならない

$$M_x=K_1 \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{ただし, } \eta=1.0) \quad (16)$$

よって、板の変位 w を求める計算プログラムに実験データを入力し、上記(8)～(11)式に示す4本の境界条件式と各計算諸元から、下記の4元連立方程式を解くことによって A_n, A'_n, B_m, B'_m 等の未知数を決定する。その結果より ξ, η の2次元で表わされる各点における変位 w を求めるという形で解析を進める。板の変位 w を求めるプログラムでは、以下の境界条件式における各境界値を厳密解と収束解の組み合わせで求めることとしている。このマトリックスを簡単に示すと次の様になる。

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \\ aa_{n1} & aa_{n2} & aa_{n3} & aa_{n4} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} \\ bb_{m1} & bb_{m2} & bb_{m3} & bb_{m4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_n \\ A'_n \\ B_m \\ B'_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{vmatrix} \quad (\text{荷重項})$$

よって、(1)(2)中に示される円振動角速度 ω を含んだ係数マトリックスの determinant=0 より以下の様な固有振動特性方程式が導かれる。

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \\ aa_{n1} & aa_{n2} & aa_{n3} & aa_{n4} \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & b_{m4} \\ bb_{m1} & bb_{m2} & bb_{m3} & bb_{m4} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

3. 計算諸元

$a=80\text{cm}$, $b=50\text{cm}$, $h=0.8\text{cm}$, $E=5.0\times 10^4\text{kg/cm}^2$, $\rho=9.0\times 10^{-4}\text{kg/cm}^3$

$\nu=0.3$, $\omega=25\text{radian/sec}$, $u_0=4.0\text{cm}$, $K_1=0$, $K_0=0$, $m=11$, $n=11$

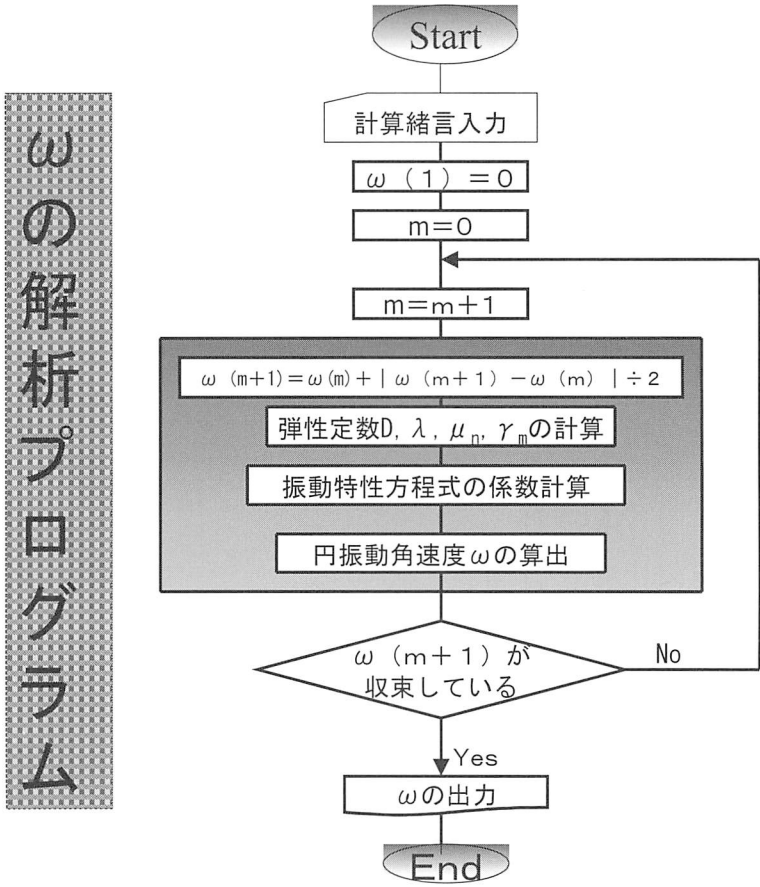
上記の協会条件の詳細をマトリックス表示した。以下にそのマトリックスを示す。

$$\begin{vmatrix} -D\frac{1}{b\lambda}P''_{nk}(1.0) & D\frac{b}{\pi^2}Q''_n(1.0) & 0 & 0 \\ -D\frac{1}{b\lambda}P''_{nk}(1.0) & D\frac{b}{\pi^2}Q''_n(1.0) & -D\nu\frac{P''_m(1.0)+P''_{mi}(1.0)}{a\lambda} & -D\nu\frac{P''_m(1.0)-P''_{mi}(1.0)}{a\lambda} \\ -D\frac{1}{b\lambda}P''_{nk}(0)-K_0\frac{1}{b\lambda}P'_{nk}(0) & D\frac{b}{\pi^2}Q''_n(0)-K_0\frac{b}{\pi^2}Q'_n(0) & -D\nu\frac{P''_m(1.0)+P''_{mi}(1.0)}{a\lambda} & -D\nu\frac{P''_m(1.0)-P''_{mi}(1.0)}{a\lambda} \\ \nu\frac{1}{b\lambda}P''_{nk}(1.0) & -\nu\frac{b}{\pi^2}Q''_n(1.0) & -D\frac{P''_m(0)+P''_{mi}(0)}{a\lambda}-K_1\frac{P'_m(0)+P'_{mi}(0)}{a\lambda} & -D\frac{P''_m(0)-P''_{mi}(0)}{a\lambda}-K_1\frac{P'_m(0)-P'_{mi}(0)}{a\lambda} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{S_n\left[\left(\overline{M}_x\right)_{x=a}\right]}{D}(=A_n) \\ \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 S_n\left[\overline{w}_a\right](=A'_n) \\ \frac{DS_m\left[\left(\overline{M}_y\right)_{y=0}\right]-S_m\left[\left(\overline{M}_y\right)_{y=b}\right]}{2D}(=B_m) \\ \frac{DS_m\left[\left(\overline{M}_y\right)_{y=0}\right]+S_m\left[\left(\overline{M}_y\right)_{y=b}\right]}{2D}(=B'_m) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{a^3}\rho hu\omega^2\cdot sum2+\frac{1}{ab^2}(2-\nu)\rho hu\omega^2\cdot sum4+D\frac{1}{b\lambda}(1-\nu)P''_n(1.0) \\ D\frac{1}{b\lambda}(1-\nu)P'_n(1.0) \\ \frac{1}{a}\frac{1}{D}K_0\rho hu\omega^2\cdot sum2-\frac{1}{b\lambda}(1-\nu)P_n(0)+D\frac{1}{b\lambda}(1-\nu)P''_n(0)+K_0\frac{1}{b\lambda}(1-\nu)P'_n(0) \\ \frac{1}{b}\frac{1}{D}K_0\rho hu\omega^2\cdot sum2-\nu\frac{1}{b\lambda}(1-\nu)P''_n(1.0) \end{vmatrix}$$

4. フローチャート及び考察



計算プログラムは試行錯誤法 (trial method) により、プログラム上で収束するようにしているが算出された値は70rad. (入力周波数として11.3Hz) と実験値の2倍近くになっている。さらなる収束条件の検討が必要である。

今後の課題は得られた ω から境界値・変位 w 及び x, y 方向断面の直応力による曲げモーメントを M_x, M_y , せん断力によるモーメントを M_{xy} 等を求め、無次元化した距離 ξ と η の値を0.1刻みの碁盤の目状の2次元して対応する各点における各値を計算し、又同様に入力周波数の変化に応じた本実験装置の分解能を明らかにし、次報に報告する予定である。

参考文献

- 1) 澤田・近藤・能町：振動台上における実験砂箱の振動について，土木学会北海道支部論文報告集，第59号，I-50，pp.182～183，2003.
- 2) 澤田・能町・近藤・田中：振動台上に設置された実験箱の振動－そのⅠ－（厳密解と収束解の検討），苫小牧工業高等専門学校紀要，第38号，pp.103～120，2003.
- 3) 澤田・能町・近藤・田中：振動台上に設置された実験箱の振動－そのⅡ－（解析結果の検討），苫小牧工業高等専門学校紀要，第38号，pp.121～138，2003.
- 4) 澤田・能町・近藤：地震時等の地盤における動的土圧分布の合力及びその作用位置について，土木学会北海道支部論文報告集，第57号，pp.558～561，2001.
- 5) 澤田・能町・近藤：振動台の上の砂箱内地盤モデルにおける動的応力と変位の弾性解，苫小牧工業高等専門学校紀要，第32号，pp.95～112，1997.
- 6) 澤田・能町・近藤：地震時地盤における深さ方向の慣性力分布の模型実験，土木学会第53回年次学術講演会概要集，I-B209，1998.
- 7) 物部高穂：地震上下動に関する考察ならびに振動雑論，土木学会誌，Vol.10，No.5，pp.1063～1094，1924.

(平成15年11月28日受理)