可分 Banach 空間はコンパクトである

新　谷　俊　忠*

Separable Banach space is compact

Toshitada SHINTANI

要　旨

可分 Banach 空間 X はコンパクトであり X は有限次元である。

Abstract

Separable Banach space X is compact so that X has finite dimension.

次の最大値の原理はよく知られている。

定理 1. （〔1〕, p.98, 定理4.4.(b)）

複素関数 f が領域 D で正則とする。

$\mathrm{M}=\sup_{z\in \mathrm{D}}|\mathrm{f}(z)|$ とおく。f(z) が定数関数でなければ

$$|\mathrm{f}(z)|<\mathrm{M}\ (\forall z\in \mathrm{D}).$$

この定理で $\mathrm{D}=\mathrm{R}=(-\infty,\infty)$, $\mathrm{f}(z)=x\ (z=x\in \mathrm{R})$ とおくと $\mathrm{M}=\sup_{x\in\mathrm{R}}|x|=\sup_{x<\infty}x<\infty$ であって

$$|x|<\mathrm{M}\ (\forall x\in \mathrm{R})$$

であるから R は有界となり，又，R が完備なことから R は閉集合になる。即ち，R はコンパクトである。

全く同様にして，定理 1 で $\mathrm{D}=\mathrm{C}$, $\mathrm{f}(z)=z\ (z\in \mathrm{C})$ とおくと，C はコンパクトである。

これを次の様に拡張する。

定理 2. 可分 Banach 空間 $(\mathrm{X},\|\ \|)$ はコンパクトであり，従ってそれは有限次元である。

証明. $(\mathrm{X},\|\ \|)$ は可分 Banach 空間とし

$$\mathrm{d}(x,y)\fallingdotseq\|x-y\|\ (\forall x,y\in \mathrm{X}).$$

∴ (X, d) は可分完備な距離空間である。

(X, d) は可分であるから可算集合 $\{\mathrm{a}_k\}\subset \mathrm{X}$ があり，$\overline{\{\mathrm{a}_k\}}=\mathrm{X}$ となる。

$$\tilde{\mathrm{d}}(x,y)\fallingdotseq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\Big|\mathrm{d}(x,\mathrm{a}_k)-\mathrm{d}(y,\mathrm{a}_k)\Big|\ (\forall x,y\in \mathrm{X})$$

とすると，$\tilde{\mathrm{d}}$ は距離で，$(\mathrm{X},\tilde{\mathrm{d}})$ は全有界且

$$x_{\mathrm{n}}\longrightarrow x\ (\mathrm{d})\Longleftrightarrow x_{\mathrm{n}}\longrightarrow x\ (\tilde{\mathrm{d}})$$

と出来ることが知られている。（〔2〕, p.13, 命題1.30）。

d と $\tilde{\mathrm{d}}$ は同じ位相を定義するから，(X, d) と $(\mathrm{X},\tilde{\mathrm{d}})$ は位相同型である。

$(\mathrm{X},\tilde{\mathrm{d}})$ の Cauchy 列を x_{n} とする。即ち

$$\tilde{\mathrm{d}}(x_{\mathrm{m}},x_{\mathrm{n}})\longrightarrow 0\ (\mathrm{m},\mathrm{n}\to\infty)$$

＊　助教授　一般教科　数学

とする。

$$\tilde{d}(x_m, x_n) \geqq \frac{1}{2}\left| d(x_m, a_1) - d(x_n, a_1) \right|$$
$$\downarrow$$
$$0 \ (m, n \to \infty)$$

より $d(x_n, a_1)$ は R の Cauchy 列である。
R は完備だから

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, a_1) = {}^{\exists}A \in R$$

$$\therefore \quad A = \lim_{n\to\infty} d(x_n, a_1)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \| x_n - a_1 \|$$
$$= \| \lim_{n\to\infty} (x_n - a_1) \| \quad \text{(ノルムの連続性)}$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - a_1) = {}^{\exists}\alpha \in X. \ (A = \| \alpha \|)$$

$$\therefore \quad 0 = \| \alpha - \alpha \|$$
$$= \| \lim_{m,n\to\infty} (x_m - a_1) - \lim_{m,n\to\infty} (x_n - a_1) \|$$
$$= \| \lim_{m,n\to\infty} \{ (x_m - a_1) - (x_n - a_1) \} \|$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \| (x_m - a_1) - (x_n - a_1) \| \quad \text{(ノルムの連続性)}$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} \| x_m - x_n \|$$
$$= \lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n)$$

$$\therefore \quad \lim_{m,n\to\infty} d(x_m, x_n) = 0$$

∴ x_n は (X, d) のCauchy列

今，(X, d) は完備だから

$$x_n \longrightarrow {}^{\exists}x \in X \quad (d)$$

∴ $x_n \longrightarrow x \quad (\tilde{d})$
∴ $(X, \tilde{d})$ は完備
∴ $(X, \tilde{d})$ は全有界且完備
∴ $(X, \tilde{d})$ はコンパクト。
(X, d) と $(X, \tilde{d})$ は位相同型だから
(X, d)，即ち，可分 Banach 空間 (X, ‖ ‖) はコンパクト。従って Rudin の定理（〔3〕，p.17，定理1.22）に依って (X, ‖ ‖) は有限次元である。(q. e. d.)

参考文献

〔1〕林実樹廣・長坂行雄，複素関数概論，サイエンス社，2003.
〔2〕小谷眞一，測度と確率１，岩波書店，1997.
〔3〕W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1973.
〔4〕I. Gel'fand, N.Vilenkin, Generalized Functions, Vol.4, Applications of Harmonic Analysis, Academic Press, 1964.

（平成15年11月17日受理）