微分方程式 $y''+a(y')^2+by'=c$

藤島　勝弘*・上木　政美**・菅原　道弘**

Differential equation $y''+a(y')^2+by'=c$

Katsuhiro FUJISHIMA, Masami UEKI and Michihiro SUGAWARA

要　旨

微分方程式 $y''+(y')^2=1$ や $y''+(y')^2+1=0$ などは，$y'=p$ とおいて1階微分方程式に直して解く方法が一般的であるが複雑な計算を要する。これを適当な置き換えによって定数係数線形微分方程式に変形し，比較的容易に解くことができることを示す。

Abstract

In the case of solving the differential equations such as $y''+(y')^2=1$ and $y''+(y')^2+1=0$, the methoed that they are transformed into first order differential equations by setting $y'=p$ is generally used. But it needs to do complex computation. We show to be able to solve them with comparative ease through transforming them into linear differential equations with constant coefficient by appropriate substitution.

1．はじめに

本校（苫小牧工業高等専門学校）での数学の授業における微分方程式の扱いは次の通りである。

(1) 第3学年（後期後半，週2時間）
　1階微分方程式（変数分離形，同次形，線形微分方程式）

(2) 第4学年（前期，週2時間）
　1階微分方程式（完全微分方程式，高次微分方程式，クレーローの微分方程式）と高階微分方程式および線形微分方程式

学生にとって，高階微分方程式は理解が困難な単元である。しかし，定数係数線形微分方程式になれば特性方程式を解く問題に変わるので比較的良く解ける。そこで，置き換えによって標題の微分方程式を定数係数線形微分方程式に変形する方法を報告する。

2．定数係数線形微分方程式

定数係数2階線形微分方程式

$$y''+ay'+by=0 \quad (a,\ b\text{は定数}) \qquad \cdots (1)$$

の解 $y=y(x)$ は次のようになる。

a，b を係数とする2次方程式 $t^2+at+b=0$（これを特性方程式という）が，

(i) 異なる2つの実数解 α，β をもつとき，微分方程式 (1) の解は，

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$$

(ii) 2重解 α をもつとき，微分方程式 (1) の解は，

$$y=e^{\alpha x}(C_1+C_2x)$$

(iii) 異なる2つの虚数解 $\lambda\pm\mu i$ をもつとき，微分方程式 (1) の解は，

$$y=e^{\lambda x}(C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x)$$

となる。（いずれの場合も C_1，C_2 は任意定数）

このように，定数係数2階線形微分方程式の解は，2次方程式を解くことによって簡単に求めることができる。

3．いくつかの例

ここでは定数係数微分方程式ではない高次微分方程式を置き換えによって，定数係数線形微分方程式の形にして解くことができる例を示す。

(a) 次の微分方程式を解け。

$$y''+(y')^2=1 \qquad \cdots (2)$$

＊　助教授　一般教科
＊＊　教　授　一般教科

教科書で扱っている標準的な解法は次の通りである。

［解1］（x を含まないと見る）
$y'=p$とおくと，

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$$

これらを（2）に代入して，

$$p\frac{dp}{dy}+p^2-1=0$$

$$\frac{p}{p^2-1}dp+dy=0$$

$$\int\frac{p}{p^2-1}dp+\int dy=a$$

$$\frac{1}{2}\log(p^2-1)+y=a$$

$$p^2-1=be^{-2y}\quad(b=e^{2a})$$

$$p=\pm\sqrt{be^{-2y}+1}=\pm\frac{\sqrt{b+e^{2y}}}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{b+e^{2y}}}{e^y}$$

$$\int\frac{e^y}{\sqrt{b+e^{2y}}}dy=\pm\int dx+c$$

ここで，$e^y=t$ とおくと左辺は，

$$\int\frac{dt}{\sqrt{b+t^2}}=\log\left(t+\sqrt{b+t^2}\right)$$

となる。
従って，

$$\log\left(t+\sqrt{b+t^2}\right)=\pm x+c$$

$$\therefore\quad t+\sqrt{b+t^2}=e^ce^{\mp x}\qquad\cdots(3)$$

両辺の逆数をとると，

$$\frac{1}{t+\sqrt{b+t^2}}=e^{-c}e^{\mp x}$$

$$\frac{t-\sqrt{b+t^2}}{-b}=e^{-c}e^{\mp x}$$

$$t-\sqrt{b+t^2}=-be^{-c}e^{\mp x}\qquad\cdots(4)$$

（3），（4）より，

$$t=\frac{e^c}{2}e^{\pm x}-\frac{be^{-c}}{2}e^{\mp x}$$

ゆえに，（2）の解は，

$$e^y=Ae^x+Be^{-x}\qquad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

［解2］（y を含まないと見る）
$y'=p$とおくと，

$$y''=\frac{dp}{dx}$$

これらを（2）に代入して，

$$\frac{dp}{dx}+p^2-1=0$$

$$\frac{dp}{p^2-1}+dx=0$$

$$\int\frac{dp}{p^2-1}+\int dx=a$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{p-1}{p+1}+x=a$$

これより，

$$\frac{p-1}{p+1}=be^{-2x}\quad(b=e^{2a})$$

$$p=\frac{1+be^{-2x}}{1-be^{-2x}}=\frac{e^x+be^{-x}}{e^x-be^{-x}}$$

$$y=\int\frac{e^x+be^{-x}}{e^x-be^{-x}}dx+c$$

$$y=\log(e^x-be^{-x})+c$$

$$e^{y-c}=e^x-be^{-x}$$

$$e^y=e^ce^x-be^ce^{-x}$$

ゆえに，（2）の解は，

$$e^y=Ae^x+Be^{-x}\qquad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

［解2］の方が少し楽である。［解1］は独特の変形があり，また計算も大変である。
我々の解法は次の通りである。

［解3］
（2）の両辺にe^yを掛けると，

$$e^yy''=e^y(y')^2=e^y\qquad\cdots(5)$$

ここで，$Y=e^y$とおくと，

$$Y'=\frac{d}{dx}(e^y)=\frac{d}{dy}(e^y)\frac{dy}{dx}=e^yy',$$

$$Y''=\frac{d}{dx}(e^yy')=e^y(y')^2+e^yy''$$

これらを（5）に代入して，

$$Y''=Y\quad\text{すなわち，}\quad Y''-Y=0\qquad\cdots(6)$$

これは定数係数線形微分方程式である。
特性方程式 $t^2-1=0$を解いて，$t=\pm1$
（6）の解は，

$$Y=Ae^x+Be^{-x}$$

ゆえに，（2）の解は，

$$e^y=Ae^x+Be^{-x}\qquad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

（b）次の微分方程式を解け。

$$y''+(y')^2+1=0\qquad\cdots(7)$$

［解1］
$y'=p$とおくと，

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}p$$

これらを（7）に代入して，

$$p\frac{dp}{dy}+p^2+1=0$$

$$\frac{p}{p^2+1}dp+dy=0$$

$$\int\frac{p}{p^2+1}dp+\int dy=a$$

$$\frac{1}{2}\log(p^2+1)+y=a$$

$$p^2+1=be^{-2y}\quad(b=e^{2a})$$

$$p=\pm\sqrt{be^{-2y}-1}=\pm\frac{\sqrt{b-e^{2y}}}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{b-e^{2y}}}{e^y}$$

$$\int\frac{e^y}{\sqrt{b-e^{2y}}}dy=\pm\int dx+c$$

ここで，$e^y=t$ とおくと左辺は,

$$\int\frac{dt}{\sqrt{b-t^2}}=\sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{b}}$$

従って,

$$\sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{b}}=\pm x+c$$

$$t=\sqrt{b}\sin(\pm x+c)$$

$$=\pm\sqrt{b}\cos c\sin x+\sqrt{b}\sin c\cos x$$

ゆえに，(7) の解は,

$$e^y=A\cos x+B\sin x\quad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

以上の方法はなかなか大変で計算力も必要である。

我々の解法は次の通りである。

［解 2］

(7) の両辺に e^y を掛けると

$$e^yy''+e^y(y')^2+e^y=0\qquad\cdots(8)$$

ここで，$Y=e^y$ とおくと,

$$Y'=e^yy',\quad Y''=e^y(y')^2+e^yy''$$

これらを (8) に代入して,

$$Y''+Y=0\qquad\cdots(9)$$

特性方程式 $t^2+1=0$ を解いて，$t=\pm i$

(9) の解は，$Y=A\cos x+B\sin x$

ゆえに，(7) の解は,

$$e^y=A\cos x+B\sin x\quad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

(c) 次の微分方程式を解け。

$$y''=1+(y')^2\qquad\cdots(10)$$

［解 1］

$y'=p$ とおくと，$y''=\dfrac{dp}{dx}$

これらを (10) に代入して,

$$\frac{dp}{dx}=1+p^2$$

$$\frac{dp}{p^2+1}=dx$$

$$\int\frac{dp}{p^2+1}=\int dx+a$$

$$\tan^{-1}p=x+a$$

$$p=\tan(x+a)$$

$$y=\int\tan(x+a)dx+b$$

$$=-\log\{\cos(x+a)\}+b$$

$$e^{-y}=e^{-b}\cos(x+a)$$

$$=e^{-b}\cos a\cos x-e^{-b}\sin a\sin x$$

ゆえに，(10) の解は

$$e^{-y}=A\cos x+B\sin x\quad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

この解は比較的容易である。

我々の方法は次の通りである。

［解 2］

(10) の両辺に e^{-y} を掛けて

$$e^{-y}y''-e^{-y}(y')^2-e^{-y}=0\qquad\cdots(11)$$

$Y=e^{-y}$ とおくと,

$$Y'=-e^{-y}y',\quad Y''=e^{-y}(y')^2-e^{-y}y''$$

これらを (11) に代入して,

$$-Y''-Y=0$$

$$Y''+Y=0\qquad\cdots(12)$$

特性方程式 $t^2+1=0$ を解いて，$t=\pm i$

(12) の解は，$Y=A\cos x+B\sin x$

ゆえに，(10) の解は,

$$e^{-y}=A\cos x+B\sin x\quad(A,\ B\text{ は任意定数})$$

4．微分方程式 $my''+m^2(y')^2=a^2$

3．における例からわかるように両辺に e^{my} を掛けて $Y=e^{my}$ とおくところがポイントである。

(a) $my''+m^2(y')^2=a^2$ $(a\neq0)$ を解け。

［解］

両辺に e^{my} を掛けて

$$me^{my}y''+m^2e^{my}(y')^2=a^2e^{my}$$

$Y=e^{my}$ とおくと,

$$Y'=me^{my}y',\quad Y''=m^2e^{my}(y')^2+me^{my}y''$$

これらを代入して,

$$Y''-a^2Y=0$$

特性方程式 $t^2-a^2=0$を解くと，$t=\pm a$より，

$$Y=Ae^{ax}+Be^{-ax}$$

ゆえに一般解は，

$$e^{my}=Ae^{ax}+Be^{-ax} \quad (A,\ B\text{は任意定数})$$

(b) $my''+m^2(y')^2+a^2=0 \quad (a\neq 0)$を解け。

［解］

両辺にe^{my}を掛けて

$$me^{my}y''+m^2e^{my}(y')^2+a^2e^{my}=0$$

$Y=e^{my}$とおくと，

$$Y'=me^{my}y',\quad Y''=m^2e^{my}(y')^2+me^{my}y''$$

これらを代入して，

$$Y''+a^2Y=0$$

特性方程式 $t^2+a^2=0$を解くと，$t=\pm ai$より，

$$Y=A\cos ax+B\sin ax$$

ゆえに一般解は，

$$e^{my}=A\cos ax+B\sin ax \quad (A,\ B\text{は任意定数})$$

5．微分方程式 $y''+a(y')^2+by'=c$

$Y=e^{ay}$（aは定数）とおくことによって，どのような微分方程式が定数係数線形微分方程式に変形することができるのかを調べた。

$Y=e^{ay}$より，

$$Y'=ae^{ay}y',\quad Y''=a^2e^{ay}(y')^2+ae^{ay}y'' \quad \cdots (13)$$

定数係数2階線形微分方程式

$$Y''+pY'+qY=0 \quad (p,\ q\text{は定数}) \quad \cdots (14)$$

の形になるように，(13) を (14) に代入して，

$$a^2e^{ay}(y')^2+ae^{ay}y''+ape^{ay}y'+qe^{ay}=0$$

$$y''+a(y')^2+py'=-\frac{q}{a}$$

すなわち，

$$y''+a(y')^2+by'=c \quad (a,\ b,\ c\text{は定数})$$

の形の微分方程式は，$Y=e^{ay}$とおくことによって，定数係数2階線形微分方程式に変形することができる。

（例）$y''+3(y')^2+2y'=1 \quad \cdots (15)$

を解け。

［解］

$Y=e^{3y}$とおくと，

$$Y'=3e^{3y}y',\quad Y''=9e^{3y}(y')^2+3e^{3y}y'' \quad \cdots (16)$$

(15) の両辺に$3e^{3y}$を掛けると，

$$3e^{3y}y''+9e^{3y}(y')^2+6e^{3y}y'=3e^{3y}$$

(16) を代入して，

$$Y''+2Y'-3Y=0 \quad \cdots (17)$$

特性方程式 $t^2+2t-3=0$を解くと，$t=1,-3$より，(17) の解は，

$$Y=Ae^{x}+Be^{-3x}$$

ゆえに，(15) の解は，

$$e^{3y}=Ae^{x}+Be^{-3x} \quad (A,\ B\text{は任意定数})$$

6．その他の微分方程式

$Y=e^{ay}$を一般化して，Yをyの関数$Y=f(y)$とおいた場合，どのような微分方程式が定数係数線形微分方程式に変形できるかを調べた。

$Y=f(y)$より，

$$Y'=f'(y)y',\quad Y''=f''(y)(y')^2+f'(y)y''$$

これらを定数係数2階線形微分方程式

$$Y''+pY'+qY=0 \quad (p,\ q\text{は定数})$$

に代入して，

$$f'(y)y''+f''(y)(y')^2+pf'(y)y'+qf(y)=0$$

$$y''+\frac{f''(y)}{f'(y)}(y')^2+py'+q\frac{f(y)}{f'(y)}=0$$

となる。

すなわち，微分方程式

$$y''+P(y)(y')^2+ay'+Q(y)=0 \quad (a\text{は定数}) \quad \cdots (18)$$

において，

$$P(y)=\frac{f''(y)}{f'(y)},\quad Q(y)=q\frac{f(y)}{f'(y)} \quad \cdots (19)$$

を満たす関数$f(y)$と定数qが存在するならば，(18) は$Y=f(y)$とおくことによって定数係数線形微分方程式に変形できる。

また，$P(y)=\dfrac{f''(y)}{f'(y)}$から，

$$f(y)=C_1\int e^{\int P(y)dy}dy+C_2$$

が得られる。

(15) の場合は，$P(y)=3$，$Q(y)=-1$であるから，$f(y)=e^{3y}$，$q=-3$とおけば，(19) を満たす。

（例1）$y''+\dfrac{1}{y}(y')^2+y'-y=0 \quad \cdots (20)$

を解け。

［解］

$\dfrac{f''(y)}{f'(y)}=\dfrac{1}{y}$, $q\dfrac{f(y)}{f'(y)}=-y$から,

$f(y)=y^2$, $q=-2$

$Y=y^2$とおくと,

$Y'=2yy'$, $Y''=2(y')^2+2yy''$

(20) の両辺に $2y$ を掛けて代入すると,

$Y''+Y'-2Y=0$

これを解いて,

$Y=Ae^x+Be^{-2x}$

よって, (20) の解は,

$y^2=Ae^x+Be^{-2x}$ (A, B は任意定数)

(例2) $y''-(y')^2\tan y+2y'+2\tan y=0$ … (21)

を解け。

［解］

$\dfrac{f''(y)}{f'(y)}=-\tan y$, $q\dfrac{f(y)}{f'(y)}=2\tan y$から,

$f(y)=\sin y$, $q=2$

$Y=\sin y$とおくと,

$Y'=y'\cos y$, $Y''=y''\cos y-(y')^2\sin y$

(21) の両辺に$\cos y$を掛けて代入すると,

$Y''+2Y'+2Y=0$

これを解いて,

$Y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$

よって, (21) の解は,

$\sin y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$ (A, B は任意定数)

5. ま と め

4. (a)(b)及び5. 6. についても, $y'=p$とおき, $y''=\dfrac{dp}{dx}$としても当然解ける。しかし, 我々の方法は真に容易である。

学生に対しては典型的な解法を理解させると共に, より簡単な解法も示すことも大切と思われる。

参 考 文 献

1) 矢野健太郎・石原繁編, 解析学概論 (新版), 裳華房 (1982)
2) 矢野健太郎, 初等微分方程式, 日本評論社 (1964)
3) 鈴木七緒, 常微分方程式, 裳華房 (1978)
4) 田河生長他, 微分積分Ⅱ, 大日本図書 (1995)

(平成15年11月27日受理)