応用数学の教材作成（ベクトル解析）

石　　信　一*

Vector Analysis in the course of Applied Mathematics

Shin-ichi ISHI

要　旨

本稿は，応用数学での一分野のベクトル解析の1/4学期用の講義ノートである。ここでの目的・目標は，ベクトル解析での微分演算子（grad，div，rot）の計算とそれらの意味及び積分公式の理解にある。1－3章は，ベクトル解析への準備（ベクトルのスカラー積とベクトル積，ベクトル関数の微分積分），4－6章が本論である。7章は，微分形式による積分定理の概要である。

Abstract

This article is written in the attempt to make vector analysis understandable within an half semester. There is a double purpose: to understand calculations and thier meanings of differential operators, i.e. gradient, divergent and rotational ones, and to describe Integral Formula, which amplify the fundamental theorem of calculus. Chap.1-3 constitute an introdution to vector analysis and Chap.4-6 comprise the central parts of this volume. The final chapter, which is like an appendix, is an advanced course interpretting the theory of differential form.

0．始　め　に

このベクトル解析の目標・目的は，

［Ⅰ］場での微分演算子（ナブラ）の作用，即ち，スカラー場に作用した勾配，ベクトル場に作用した回転・発散の計算とそれらの意味について

［Ⅱ］それらの微分概念を積分で言い替える「積分定理」の内容について（これらは，微分積分の基本定理の高次元への拡張でもある）

の理解・習得にある。以下，本稿の概略を述べると，まず，スカラー積とベクトル積を復習し，1－3章では，ベクトル関数の微分･積分（線積分・面積分）について説明する。4－6章が本論となる。7章は，微分形式による積分定理（「Stokesの定理」）の概説である。

スカラー積

スカラー積（内積）は，余弦定理のベクトル表示といえるものである。今，二つのベクトル$\vec{A}$，$\vec{B}$の成分表示をすれば，

$$\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)=(|\vec{A}|l,|\vec{A}|m,|\vec{A}|n),\quad \vec{B}=(B_x,B_y,B_z)=(|\vec{B}|l',|\vec{B}|m',|\vec{B}|n')$$

ここに，$l,l',\cdots$は，各ベクトルの方向余弦である。$\vec{B}-\vec{A}=\overrightarrow{AB}$として余弦定理から，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

と書ける。直接，成分で書けば，

＊　助教授　機械工学科

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2+(A_z-B_z)^2$$
$$=(A_x^2+A_y^2+A_z^2)+(B_x^2+B_y^2+B_z^2)-2\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}\cos\theta$$

整理して,

$$(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2+(A_z-B_z)^2-\{(A_x^2+A_y^2+A_z^2)+(B_x^2+B_y^2+B_z^2)\}$$
$$=-2(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)=-2\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}\cos\theta$$
$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}\cos\theta=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=\vec{A}\ \vec{B} \quad (1)$$

ここで簡単化して, $|\vec{A}|=|\vec{B}|=1$とすれば,

$$|\overrightarrow{AB}|^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cos\theta=2-2\cos\theta \quad (2)$$

他方, 三平方の定理から,

$$|\overrightarrow{AB}|^2=(l-l')^2+(m-m')^2+(n-n')^2$$
$$=(l^2+m^2+n^2)+(l'^2+m'^2+n'^2)-2(ll'+mm'+nn')=2-2(ll'+mm'+nn') \quad (3)$$

上式(2), (3)の比較から,

$$\cos\theta=ll'+mm'+nn'$$

で, 次の内積の成分表示

$$|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=(|\vec{A}|l)(|\vec{B}|l')+(|\vec{A}|m)(|\vec{B}|m')+(|\vec{A}|n)(|\vec{B}|n')$$
$$=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad (4)$$

を得る。以下, $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=\vec{A}\ \vec{B}$と記す（スカラー積の記号として, $\vec{A}\ \vec{B}$の代わりに$\vec{A}\cdot\vec{B}$, $<\vec{A},\vec{B}>$等も用いられる)。

スカラー積(内積)の解釈：

$$\vec{A}\ \vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=|\vec{A}|\times\vec{B}\text{の}\vec{A}\text{方向の成分}=|\vec{B}|\times\vec{A}\text{の}\vec{B}\text{方向の成分} \quad (5)$$

$\vec{B}$の$\vec{A}$方向の成分のことを$\vec{B}$の$\vec{A}$の射影（projection）という（$\vec{A}$の$\vec{B}$方向の成分は$\vec{A}$の$\vec{B}$の射影（projection))。尚, スカラー積の定義されたベクトル空間（計量空間）をユークリッド空間ともいう。

［例］$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$を力のベクトル, $\vec{r}=(x,,y,z)$を変位ベクトルとすれば, $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$は微小変位ベクトルである。スカラー積$\vec{F}d\vec{r}=(F_xdx,F_ydy,F_zdz)$は微小変位に対する仕事量となる。位置A(始点)からB(終点)への仕事量は$\int_A^B\vec{F}d\vec{r}$である。

	スカラー積の性質		スカラーの性質
(1)	$\vec{A}\ \vec{B}=\vec{B}\ \vec{A}$	(1)	$\|\vec{A}\|\geq0$
(2)	$\vec{A}(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\ \vec{B}+\vec{A}\ \vec{C}$	(2)	$\|\vec{A}\|=0\Longrightarrow\vec{A}=0$
(3)	$(c\vec{A})\vec{B}=c\vec{A}\vec{B}=\vec{A}(c\vec{B})$	(3)	$\|c\vec{A}\|=\|c\|\|\vec{A}\|$
(4)	$\vec{A}\ \vec{A}=0\Longleftrightarrow\vec{A}=0$	(4)	$\|\vec{A}\ \vec{B}\|\leq\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|$ (Cauchy-Schwalz の不等式)
(5)	$\vec{A}\ \vec{B}=0\Longleftrightarrow\vec{A}\perp\vec{B}$	(5)	$\|\vec{A}+\vec{B}\|\leq\|\vec{A}\|+\|\vec{B}\|$ (三角不等式)

ベクトル積

有効線分からベクトルを定義したように, “有効面分”からベクトル積を定義しよう。二つのベクトル$\vec{A}$, $\vec{B}$から作られる平行四辺形の面積は$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$である（但し, $0\leq\theta\leq\pi$である)。この面積に向きを次のように指定する。向きはその面に垂直で, $\vec{A}$から$\vec{B}$に回る方向（右ネジの進む方向）を正とする。向きと面

積の大きさが等しければそれらは同じベクトルとみなす（同値類）。この法線単位ベクトルを$\vec{n}$とする。この有効面分を

$$S\vec{n}=\vec{S}=\vec{A}\times\vec{B}$$

と表し，$\vec{S}$を面積ベクトルと呼ぶ。$\vec{A}\times\vec{B}$をベクトル$\vec{A}$，$\vec{B}$のベクトル積という（この定義から$\vec{A}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}(\vec{A}\times\vec{B})=0$は明らか）。

ベクトル積の成分表示を求める。スカラー積の結果を用いて，

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2}{(|\vec{A}||\vec{B}|)^2}$$

分母を払って，整理すると，

$$\begin{aligned}(|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta)^2&=(|\vec{A}||\vec{B}|)^2-(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)^2\\&=(A_yB_z-A_zB_y)^2+(A_zB_x-A_xB_z)^2+(A_xB_y-A_yB_x)^2\\&=(A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x)(A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x)\end{aligned}$$

$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta|=|\vec{A}\times\vec{B}|$だから（± の符号が付くが正をとって），

$$\vec{A}\times\vec{B}-(A_yB_z-A_zB_y,A_zB_x-A_xB_z,A_xB_y-A_yB_x) \tag{6}$$

となる。次の連立方程式を解いてもよい；$\vec{S}\vec{A}=\vec{S}\vec{B}=0$，$\vec{S}\vec{S}=|\vec{S}|^2=|\vec{A}\times\vec{B}|^2=(|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta|)^2$

ベクトル積$(\vec{A}\times\vec{B})$を形式的に行列式を用いて，

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}A_y&A_z\\B_y&B_z\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}A_z&A_x\\B_z&B_x\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}A_x&A_y\\B_x&B_y\end{vmatrix} \tag{7}$$

とするのが計算上便利である（ベクトル積の性質が行列式の性質によって解釈できる）。また，交代行列（反対称行列）を用いて

$$\begin{pmatrix}0&-A_z&A_y\\A_z&0&-A_x\\-A_y&A_x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}A_x&A_y&A_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-B_z&B_y\\B_z&0&-B_x\\-B_y&B_x&0\end{pmatrix} \tag{8}$$

と書ける（ここでは，横ベクトルと縦ベクトルは等価）。

［例］原点 0 を中心として一定の角速度 ω で回転する円運動は，時刻 t の原点を適当に選ぶとき$\vec{V}(t)=\vec{r}\times\vec{\omega}=(r\cos\omega t,r\sin\omega t,0)$と表せる。その速度は，$z(t)=(-\omega y,\omega x,0)$である。従って$\vec{V}=(V_x,V_y,V_z)=(-\omega y,\omega x,0)$は，各点が角速度 ω で原点 0 の周りを回転している速度ベクトル場である。

点 P に力$\vec{F}$が作用するとき，$\vec{r}\times\vec{F}$を点 0 の周りの力のモーメントという。力$\vec{F}$の代わりに運動量$\vec{p}=m\vec{v}$であれば，$\vec{r}\times\vec{p}$を点 0 の周りの運動量のモーメント（角運動量）という。質点 m の代わりに，密度 p の剛体を考えるとき，$\int(\vec{r}\times\vec{v})pdv$は，剛体の原点 0 の回りの角運動量である。

ベクトル積の性質

(1) $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ （交代性（反対称性））
(2) $(c\vec{A})\times\vec{B}=c(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times(c\vec{B})$ （線形性）
(3) $\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ （分配律）
(4) $\vec{A}\times\vec{B}=0\iff\vec{A}\parallel\vec{B}$ （$\vec{A}$，$\vec{B}$は一次従属という）

1．ベクトル関数の微分と積分

ベクトル$\vec{A}$が変数tに依存するとき，$\vec{A}(t)=(A_x(t),A_y(t),A_z(t))$と表し，$\vec{A}(t)$を変数$t$のベクトル関数という。他方，一変数関数$a(t)$をベクトル関数に対応してスカラー関数という。ベクトル関数の微分（導関数を求めること）は，スカラー関数の微分のように，

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\vec{A}'(t)$$

で定義する。ベクトル関数の導関数$\vec{A}'(t)$は，変数tの関数である。要するに，ベクトル関数の微分は各成分を微分すればよいのである：

$$\vec{A}'(t)=(A'_x(t),A'_y(t),A'_z(t))$$

高次の導関数$\dfrac{d^n\vec{A}(t)}{dt^n}$についても同様である。二つのベクトル関数$\vec{A}(t)$ $\vec{B}(t)$の内積と外積に関する微分公式は，スカラー関数$(a(t), b(t))$の積の微分公式$(ab)'=a'b+ab'$のように，

$$(\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t))'=\vec{A}'(t)\cdot\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\cdot\vec{B}'(t),\ (\vec{A}(t)\times\vec{B}(t))'=\vec{A}'(t)\times\vec{B}(t)+\vec{A}(t)\times\vec{B}'(t)$$

となる。

独立変数が１つ増えた二変数ベクトル関数$\vec{A}(t,s)=(A_x(t,s),A_y(t,s),A_z(t,s))$の一階の偏微分は，

$$\frac{\partial\vec{A}(t,s)}{\partial t}=\left(\frac{\partial A_x(t,s)}{\partial t},\frac{\partial A_y(t,s)}{\partial t},\frac{\partial A_z(t,s)}{\partial t}\right),\ \frac{\partial\vec{A}(t,s)}{\partial s}=\left(\frac{\partial A_x(t,s)}{\partial s},\frac{\partial A_y(t,s)}{\partial s},\frac{\partial A_z(t,s)}{\partial s}\right)$$

で，各成分を微分すればよい。高次の偏導関数について，例えば，

$$\frac{\partial^2\vec{A}(t,s)}{\partial t^2},\ \frac{\partial^2\vec{A}(t,s)}{\partial s^2},\ \frac{\partial^2\vec{A}(t,s)}{\partial t\partial s}=\frac{\partial^2\vec{A}(t,s)}{\partial s\partial t}$$

等についても同様である。$\vec{A}(t,s)$,$\vec{A}(t,s,r)$の全微分は，

$$d\vec{A}(t,s)=\frac{\partial\vec{A}(t,s)}{\partial t}dt+\frac{\partial\vec{A}(t,s)}{\partial s}ds,\ \ d\vec{A}(t,s,r)=\frac{\partial\vec{A}(t,s,r)}{\partial t}dt+\frac{\partial\vec{A}(t,s,r)}{\partial s}ds+\frac{\partial\vec{A}(t,s,r)}{\partial r}dr$$

と書ける。

［例題］以下の微分公式を証明せよ。（a，bは定数）

(a) $\dfrac{d}{dt}\left(a\vec{f}(t)+b\vec{g}(t)\right)=a\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}+b\dfrac{d\vec{g}(t)}{dt}$

(b) $\dfrac{d}{dt}\left(a(t)\vec{f}(t)\right)=\dfrac{da(t)}{dt}\vec{f}(t)+a(t)\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}$

(c) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{f}(t)\vec{g}(t)\right)=\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\dfrac{d\vec{g}(t)}{dt}$

(d) $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right)=\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}\times\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\times\dfrac{d\vec{g}(t)}{dt}$

［解］

$$\vec{f}(t)=(f_x(t),f_y(t),f_z(t)),\quad \vec{g}(t)=(g_x(t),g_y(t),g_z(t))$$

として，

(a) 各成分について，積の微分公式を確認すれば良い。

$$(af_x(t)+bg_x(t))'=a\vec{f}'_x(t)+b\vec{g}'_x(t)$$

同様にして，y-と z-成分についても得る。

(b) $(a(t)f_x(t))'=a'(t)f_x(t)+a(t)f_x'(t)$

(c) $\left(\vec{f}(t)\vec{g}(t)\right)'=(f_xg_x+f_yg_y+f_zg_z)'=f_x'g_x+f_xg_x'+f_y'g_y+f_yg_y'+f_z'g_z+f_zg_z'=\vec{f}'\vec{g}+\vec{f}\vec{g}'$

(d) $\left(\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)\right)'=\dfrac{d}{dt}\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\f_x&f_y&f_z\\g_x&g_y&g_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\f_x'&f_y'&f_z'\\g_x&g_y&g_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\f_x&f_y&f_z\\g_x&g_y&g_z\end{vmatrix}$

$$=\frac{d\vec{f}(t)}{dt}\times\vec{g}(t)+\vec{f}(t)\times\frac{d\vec{g}(t)}{dt}$$

$\dfrac{d\vec{B}(t)}{dt}=\vec{A}(t)$のとき，ベクトル関数$\vec{B}(t)$をベクトル関数$\vec{A}(t)$の不定積分という。これより，ベクトル関数の定積分は，

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{A}(t)dt=\left(\int_{t_1}^{t_2}A_x(t)dt,\int_{t_1}^{t_2}A_y(t)dt,\int_{t_1}^{t_2}A_z(t)dt\right)=\left[\vec{B}(t)\right]_{t_1}^{t_2}=\vec{B}(t_2)-\vec{B}(t_1)$$

$$=(B_x(t_2),B_y(t_2),B_z(t_2))-(B_x(t_1),B_y(t_1),B_z(t_1))$$

となる。

［問題］以下の積分公式を証明せよ（a，b は定数，$\vec{a}$は定数ベクトル)。

(a) $\int\left(a\vec{f}(t)+b\vec{g}(t)\right)dt=a\int\vec{f}(t)dt+b\int\vec{g}(t)dt$

(b) $\int\left(\vec{c}\times\vec{f}(t)dt\right)=\vec{c}\times\int\vec{f}(t)dt$

(c) $\int a(t)\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}dt=a(t)\vec{f}(t)-\int\dfrac{da(t)}{dt}\vec{f}(t)dt$

$\int\dfrac{da(t)}{dt}\vec{f}(t)dt=a(t)\vec{f}(t)-\int a(t)\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}dt$

(d) $\int\vec{f}(t)\dfrac{d\vec{g}(t)}{dt}dt=\vec{f}(t)\vec{g}(t)-\int\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}\vec{g}(t)dt$

(e) $\int\vec{f}(t)\times\dfrac{d\vec{g}(t)}{dt}dt=\vec{f}(t)\times\vec{g}(t)-\int\dfrac{d\vec{f}(t)}{dt}\times\vec{g}(t)dt$

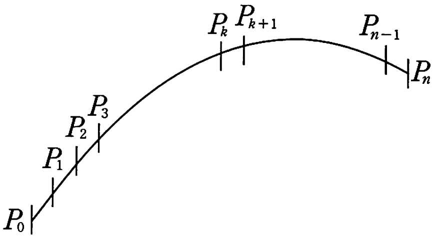
質点の運動を例として，上述のベクトル関数の微分の計算練習をしておこう。質点の位置ベクトルを$\vec{r}(t)$で表すと，その速度ベクトル$\vec{v}(t)$は，

$$\vec{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

で，$\vec{v}$の向きは質点の軌跡の接線の向きと一致する。それに平行なベクトルを接線ベクトルという。$\vec{v}$は曲線の接線ベクトルとなる。その単位接線ベクトル$\vec{t}(t)(|\vec{t}|=1)$は，

$$\vec{t}=\frac{\vec{v}(t)}{|v(t)|}=\frac{\vec{v}}{v},\ |\vec{v}(t)|=v(t)$$

図．曲線の分割



ここで，曲線の線素の定義を述べておこう。そのために，まず，二点 A，B の曲線 C の長さを次のように定める。

今，分割点（$P_0,P_1,P_2,\cdots,P_n$）を結び，折れ線

$$l_n=\overline{P_0P_1}+\overline{P_1P_2}+\cdots+\overline{P_{n-1}P_n}$$

を作る(右図)。この分割を細かくし，$n\to\infty$の極限

$$\lim_{n\to\infty} l_n = L$$

が存在するとき，L を曲線の長さという。

線分（弦）$\overline{P_iP_{i+1}}(=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2})$，曲線上の微小区間（無限小孤長）を$\Delta_s$とすれば，$n\to\infty$ の極限では，その比は$\dfrac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\Delta_s}\longrightarrow 1$となる。従って，

$$\Delta_s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t \tag{1}$$

と書ける。ここに，弧長の微分 ds を線要素（単に線素）という：

$$ds=\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|dt=|d\vec{r}|\quad \text{あるいは,}\quad \frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|=v \tag{2}$$

この関係式から t の代わりに s も媒介変数として使える。この s は長さ(距離)を表すパラメーターで弧長媒介変数（arc-length parameter）という。

パラメーター s を用いれば，

$$\vec{v}(s)=\frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=v(t)\vec{t},\ \left(\frac{ds}{dt}=v,\ \frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{t}\right)$$

と書ける。s についての微分 $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ の大きさは常に 1 に等しい。$v=const.$ という特別の場合が等速運動に対応する。

質点の加速度$\vec{a}(t)$は，

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=\frac{d(v(t)\vec{t})}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{t}+v\frac{d\vec{t}}{dt}=a_t\vec{t}+a_n\vec{n}\left(\frac{d\vec{t}}{dt}\parallel\vec{n}\right) \tag{3}$$

ここに，$a_t\left(=\dfrac{dv}{dt}\right)$，$a_n$は接線及び法線方向の加速度成分である。次に，その係数a_nを求める：$|\vec{t}|^2=(\vec{t},\vec{t})=1$ の両辺を s について微分すれば，

$$\frac{d\vec{t}}{ds}\cdot\vec{t}+\vec{t}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=2\vec{t}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=0\longrightarrow\vec{t}\perp\frac{d\vec{t}}{ds}\left(\text{従って，}\ \frac{d\vec{t}}{ds}\parallel\vec{n}\right)$$

となる。これより，法線方向の単位ベクトル$\vec{n}$は，

$$\vec{n}=\frac{\dfrac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\dfrac{d\vec{t}}{ds}\right|}\longrightarrow\kappa\vec{n}=\frac{d\vec{t}}{ds} \tag{4}$$

ここに，比例係数 κ は，

$$\kappa(s)=\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|=\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|=\frac{d\theta}{ds} \tag{5}$$

と書ける。θ は接線ベクトル$\vec{t}$と$\vec{t}+\Delta\vec{t}$との間の角である。比例係数 κ は曲率という。曲率 κ の意味は，s の変化に対する接線の回転の変化率である。κ の逆数を曲率半径($\kappa^{-1}=\rho$)，ρを半径とする円を曲率円という。こうして，

$$\frac{d\vec{t}}{dt}=\left|\frac{d\vec{t}}{dt}\right|\vec{n}=\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|\frac{ds}{dt}\vec{n}=\kappa v\vec{n}$$

で，よって，(3)式は，

$$\vec{a}=a_t\vec{t}+a_n\vec{n}=\frac{dv}{dt}\vec{t}+v^2\kappa\vec{n}$$

と書ける。もっと直接的に求めることもできる。上式から$a_n\vec{n}=\vec{a}-a_t\vec{t}$として，両辺の絶対値をとれば($|\vec{n}|=1$)，$a_n=|\vec{a}-a_t\vec{t}|$となる。

［例題］ 円運動$\vec{r}(t)=(a\cos(\omega t), a\sin(\omega t))$について，$\vec{v}(t), \vec{a}(t)$を求めよ。

［解］

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\omega(-a\sin\omega t, a\cos\omega t)=\vec{\omega}\times\vec{r}(t), \vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=-\omega^2(a\cos\omega t, a\sin\omega t)=-\omega^2\vec{r}(t)$$

$\vec{t}$と$\vec{n}$によって張られる平面を接触平面という。この平面に垂直な単位ベクトル$\vec{b}$は，

$$\vec{b}=\vec{t}\times\vec{n},\ |\vec{b}|=1 \tag{6}$$

で，このとき，$\vec{n}, \vec{b}$を主及び従法線単位ベクトルという。$\vec{n}$と$\vec{b}$を含む平面を法平面，$\vec{b}$と$\vec{t}$を含む平面を展直平面という。このように，$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$は三次元空間の曲線に付随した座標系（これを動座標系という）の正規直交基底にとれる（フレネー枠（Frenet's frame）と呼ばれる）：

$$\vec{t}\times\vec{n}=\vec{b},\ \vec{n}\times\vec{b}=\vec{t},\ \vec{b}\times\vec{t}=\vec{n}$$

そこで，それらの微分 $\vec{t}'\left(=\frac{d\vec{t}}{ds}\right), \vec{n}'\left(=\frac{d\vec{n}}{ds}\right), \vec{b}'\left(=\frac{d\vec{b}}{ds}\right)$の関係を見る：

$$\vec{b}'=(\vec{t}\times\vec{n})'=\vec{t}'\times\vec{n}+\vec{t}\times\vec{n}'=\vec{t}\times\vec{n}' \longrightarrow \vec{b}'\perp\vec{t} \tag{7}$$

$$(\vec{b}\cdot\vec{b})'=2\vec{b}\cdot\vec{b}'=0 \longrightarrow \vec{b}\perp\vec{b}' \tag{8}$$

(7)，(8)式より，$\vec{b}'$は$\vec{n}$に平行である。従って，(2)式のときと同様に比例係数を付けて，

$$\vec{b}'=-\tau\vec{n} \tag{9}$$

と書く。以下に示すように，この比例係数τは捩率（ねじれ）と呼ばれ，sに対する従法線（あるいは接触平面）の回転の変化率を表わしている。$\vec{n}$は，(4)，(8)式から，

$$\vec{n}'=(\vec{b}\times\vec{t})'=\vec{b}'\times\vec{t}+\vec{b}\times\vec{t}'=-\kappa\vec{n}\times\vec{t}-\tau\vec{b}\times\vec{n}=\tau\vec{b}-\kappa\vec{t} \tag{10}$$

となる。よって，これらの関係式をまとめと，

$$\begin{cases}\vec{t}' &=& & \kappa\vec{n} & \\ \vec{n}' &=& -\kappa\vec{t} & + & \tau\vec{b} \\ \vec{b}' &=& & -\tau\vec{n} & \end{cases} \xrightarrow{\text{行列形式}} \begin{pmatrix}\vec{t}'\\ \vec{n}'\\ \vec{b}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{pmatrix} \tag{11}$$

と書ける。この関係式を Frenet-Serret の公式という。τの表式として，

$$\tau=\vec{b}'\cdot\vec{n}=(\vec{t}\times\vec{n})'\cdot\vec{n}=(\vec{t}\times\vec{n}')\cdot\vec{n}=|\vec{t}\ \vec{n}'\ \vec{n}|=|\vec{t}\ \vec{n}\ \vec{n}'|$$

$$=\left|\vec{t}\kappa^{-1}\vec{t}-\frac{\kappa'}{\kappa^2}\vec{t}+\kappa^{-1}\vec{t}'\right|=\kappa^{-2}|\vec{t}\ \vec{t}'\ \vec{t}''|=\kappa^{-2}|\vec{r}\ \vec{r}''\ \vec{r}'''|$$

を得る。

［問題］(1) 次の曲率κの表式を導け。

(a) $x=x(t), y=y(t)$のとき　$\kappa=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$　(b) $y=f(x)$のとき$\kappa=\dfrac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(2) 円(半径 a)の曲率 κ を求めよ。

2．曲線と線積分

三次元空間として，定点$A(a_x,a_y,a_z)$を通り，方向ベクトル$\overrightarrow{B}(b_x,b_y,b_z)$に平行な直線のベクトル方程式は媒介変数 t を用いて，

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}t \xrightarrow{\text{成分表示}} \begin{cases} x=a_x+b_xt \\ y=a_y+b_yt \\ z=a_z+b_zt \end{cases} \xleftrightarrow{\text{媒介変数}t\text{を消去}} \frac{x-a_x}{b_x}=\frac{y-a_y}{b_y}=\frac{z-a_z}{b_z}$$

となる。特に，点 A を原点に移せば，$\vec{r}(t)=\overrightarrow{B}t$となる。ここに，$t$を時間，$|\overrightarrow{B}|(=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2})$を単位時間に動く距離と考えれば，$|\vec{r}(t)|$は t 時間後の原点からの移動距離となる（等速度運動を意味する)。

上述の表式を一般化して，

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)) \tag{1}$$

は，空間の曲線 C を表す。つまり，tが動けば一つの曲線を描く（粒子の運動の軌跡である)。有向直線のように，向きを考慮する曲線を有向曲線という。$A \to B$ の向きをもつ曲線を C とすれば，$B \to A$ のそれを $-C$ で表す。

曲線の線要素(簡単に線素)ds を，

$$ds=|d\vec{r}|=\sqrt{d\vec{r}d\vec{r}}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt, \qquad ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dx^2}$$

と書く。$\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ は接線ベクトルで上式より，$\dfrac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}=\vec{t}$ は単位接線ベクトルとなる。

二点A，B の曲線の長さ L は，

$$L=\int_A^B ds=\int_C ds=\int_C\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt=\int_C\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_C\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \tag{2}$$

と書ける（. は時間微分を示す)。s 及び t に関する積分を曲線 C に沿っての線積分という。このとき，C を積分経路，あるいは，単に路という。例えば，半径 a の円周を求めるには，

$$x^2+y^2=a^2 \longleftrightarrow \begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases} \quad (0\leq t\leq 2\pi)\text{として，上式(2)を用いて，}$$

$$L=\int_C\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt=a\int_0^{2\pi}dt=2\pi a$$

と計算すれば良い。このように，線積分の値は媒介変数の取り方に関係しない。

上式$\int_C ds$において ds の重み(密度）は定数1としているが，一般に，曲線上の重みが$f(x(s),y(s),z(s))$のときの ds の線積分を$\int_C f(x(s),y(s),z(s))ds$と表す。また，曲線が閉曲線のときには，$\oint f(x(s),y(s),z(s))ds$ と表わす（$\oint\cdots ds$を周回積分という)。

積分変数 s の代わりに t をとれば，

$$\int_C f(x(s),y(s),z(s))ds=\int_C f(x(t),y(t),z(t))\frac{ds}{dt}\,dt=\int_C f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt \tag{3}$$

となる。その際，曲線の向きは閉曲線の内部を左側に見るようにとる(時計の針とは反対である)。閉曲線としては，交わることなく，その内部の一点に連続的に変形可能であるとする。そういう曲線を単一閉曲線という。以下では(今までのように)単一閉曲線のみを扱う。

線積分の基本的性質として(c_1,c_2は定数)，

(Ⅰ) $\int_A^B fds=\int_A^C fds+\int_C^A fds$ （加算性）

(Ⅱ) $\int_A^B fds=-\int_B^A fds$ （可逆性）

(Ⅲ) $\int_A^B (c_1f_1+c_2f_2)ds=c_1\int_A^B f_1ds+c_2\int_A^B f_2ds$ （線型性）

がある(図示すれば明らか)。

上式のスカラー関数fの代わりにベクトル関数$\vec{f}=(f_x,f_y,f_z)$が曲線C上で与えられているとき，次の積分

$$\int_C \vec{f}\vec{t}ds=\int_C\left(f_x\frac{dx}{ds}+f_y\frac{dy}{ds}+f_x\frac{dz}{ds}\right)ds=\int_C\vec{f}d\vec{r} \tag{4}$$

を曲線Cに沿ったベクトル$\vec{f}$の接線線積分という。積分路が周回する（曲線Cが閉曲線）ときの積分を$\oint\vec{f}d\vec{r}$で表す。(4)式の意味は，例えば，$\vec{f}$を力場とすれば，曲線Cに沿った仕事量（＝力 × 距離）を表す。曲線Cが閉曲線であれば，曲線Cに沿っての$\vec{f}$の循環量（あるいは，渦度）という。$\oint\vec{f}d\vec{r}=0$のとき，後述のように，そのベクトル場は保存力場（あるいは，渦無し場）となる。他方，

$$\int_C\vec{f}\vec{n}ds=\int_C(f_xn_x+f_yn_y+f_zn_z)ds \tag{5}$$

をベクトル$\vec{f}$の法線線積分という。この線積分は，例えば，$\vec{f}$を流体中の速度ベクトルとすれば，曲線Cを横切る流量を意味する。

［問題1］次のベクトル方程式はどんな曲線を表すか？($\vec{a}=(a_1,a_2)$, $\vec{b}=(b_1,b_2)$は定数ベクトル，a,ωは定数）

(a) $\vec{r}(t)=\vec{a}t$　　(b) $\vec{r}(t)=a(\sin\omega t,\cos\omega t), a=|\vec{a}|$

(c) $\vec{r}(t)=\vec{a}\cos t+\vec{b}\sin t$　　(d) $\vec{r}(t)=\vec{a}\sin t+\vec{b}\cos t$

［問題2］次の曲線の長さ求めよ。

(a) $\vec{r}(t)=a(t^2,2t); t=0\longrightarrow t=1$　　(b) $\vec{r}(\theta)=a(\sin^3\theta,\cos^3\theta)$の全周; $0\leq\theta\leq 2\pi$

(c) $\vec{r}(\theta)=a(\theta-\sin\theta,\theta-\cos\theta)$; $0\leq\theta\leq 2\pi$

［問題3］(1) 関数$y=f(x)(A<x<B)$の曲線の長さは$s=\int_A^B\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$で与えられることを示せ。

(2) 半径aの円周の長さを求めよ。

［問題4］線積分の計算：曲線C:$\vec{r}(t)=(3\cos t,3\sin t,0),(0\leq t\leq 2\pi)$に沿う次の線積分を求めよ。

(1) $\oint_C\vec{a}d\vec{r}$ ($\vec{a}=(x-y,x+y,0)$)　　(2) $\oint_C\vec{a}d\vec{r}$ ($\vec{a}=(x^2+2y^2,xy^2,0)$)

3．曲面と面積分

曲面の中で特別な平面と球面から説明しよう。

三次元空間で同一直線上にない三点$A(a_x,a_y,a_z),B(b_x,b_y,b_z),C(c_x,c_y,c_z)$を通る平面の方程式は,

$$\begin{vmatrix} x-a_x & x-a_y & z-a_z \\ a_x-c_x & a_y-c_y & a_z-c_z \\ b_x-c_x & b_y-c_y & b_z-c_z \end{vmatrix}=0,\ \text{あるいは,}\ \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_x & a_y & a_z & 1 \\ b_x & b_y & b_z & 1 \\ c_x & c_y & c_z & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{1}$$

と書ける。この平面に垂直の単位法線ベクトル$\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$は，平面上の二つの独立なベクトル$\overrightarrow{CA}(=\vec{A}-\vec{C}),\overrightarrow{CB}(=\vec{B}-\vec{C})$によって，$\vec{n}=\dfrac{\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|}$で与えられる。平面上の任意の点を$\vec{r}=(x,y,z)$として，点$C$を通る平面のベクトル方程式は,

$$\vec{n}(\vec{r}-\vec{C})=0 \xrightarrow{\text{成分表示}} n_x(x-c_x)+n_y(y-c_y)+n_z(z-c_z)=0$$

となる(陰関数表示)。また，平面上の任意の点は，二つの媒介変数u,vを用いて,

$$\vec{r}(u,v)=\overrightarrow{CA}u+\overrightarrow{CB}v \xrightarrow{\text{成分表示}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_x-c_x \\ a_y-c_y \\ a_z-c_z \end{pmatrix}u+\begin{pmatrix} b_x-c_x \\ b_y-c_y \\ b_z-c_z \end{pmatrix}v$$

となる(媒介変数表示)。

原点に中心をもつ球面（半径$=a$）の方程式は，球面座標をパラメーターとして

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \xrightarrow{(\theta,\phi)} \begin{cases} x=a\sin\theta\cos\phi \\ y=a\sin\theta\sin\phi \\ z=a\cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

と表わせる(陰関数表示から媒介変数表示)。球面上の位置$P(\theta,\phi)$をベクトルの成分表示をすれば($\overrightarrow{OP}=\vec{r}$),

$$\vec{r}(\theta,\phi)=(a\sin\theta\cos\phi,a\sin\theta\sin\phi,a\cos\theta)=(x(\theta,\phi),y(\theta,\phi),z(\theta))$$

と書ける。このとき，パラメーター(θ,ϕ)が領域$(0\leq\theta\leq\pi,0\leq\phi\leq2\pi)$を動く時，点$P$は球面（曲面）を描く。上式を一般化して，二つのパラメーターu,vを用いて,

$$\vec{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \tag{3}$$

を曲面のベクトル方程式という。(3)式において，$r(u,v=b)$あるいは$r(u=a,v)$は曲線を描くことになる(a,bは定数)。これらの曲線は$u-$及び$v-$曲線という。それらの接線ベクトルを

$$\vec{r}_u=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u},\quad \vec{r}_v=\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$$

で表わすと，任意の点$\vec{r}$における接平面は,

$$d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv$$

で，この接平面に垂直な単位法線ベクトル$\vec{n}$は,

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}$$

と書ける。ベクトル積の定義式から微小面積要素ベクトル$d\vec{S}$は,

$$d\vec{S}=\vec{r}_u du\times\vec{r}_v dv=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)dudv \tag{4}$$

その大きさは，

$$|d\vec{S}| = dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv = \vec{n} d\vec{S} \tag{5}$$

で，dS を曲面の面積要素（簡単に面素）という。そして，dS についての積分 $\iint f dS$（fは重み（密度関数））を面積分という。例えば，(2)式で表わされている球面の表面積（f=1 として）は(5)式から，

$$dS = a^2 \sin\theta d\theta d\phi,\ (0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を求め，次に積分を実行すれば，

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi a^2$$

で，確かに球面の表面積を与える。この面積分の解釈として，$\vec{f} = \rho\vec{v}$ を流量密度ベクトル（ρ は流体の密度，$\vec{v}$はその速度ベクトル）とすれば，

$$\vec{f} d\vec{S} = v_n dS = \rho v \cos\theta dS = 密度(\rho) \times 高さ(v \cos\theta) \times 底面積=流量$$

を意味する。

曲面が$z=f(x,y)$で与えられているときは，x,y をパラメーターとみなす。$\vec{r}=(x,y,z)=(x,y,z(x,y))$として，

$$\vec{r}_x = (1,0,z_x),\ \vec{r}_y = (0,1,z_y)\quad 但し，z_x = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x},\ z_y = \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$$

こうして，単位法線ベクトルは$\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_y|}$，面積要素ベクトル$d\vec{S}$及びその大きさ dS は，

$$d\vec{S} = (\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\, dxdy = (-f_x, -f_y, 1)\, dxdy$$

$$dS = |r'_x \times r'_y|\, dxdy = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy$$

となる。従って，曲面の表面積は，

$$S = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dxdy,\ 但し，D=\{(x,y)\,|\,曲面のxy平面上の正射影\}$$

と書ける。(u,v) 平面内の領域に曲線$u=u(t), v=v(t)$をとり，それに対応して曲面上に曲線$\vec{r}(t)=\vec{r}(u(t),v(t))$を考える。この曲線$\vec{r}(t)$の接線ベクトルは，

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt}$$

であり，$|d\vec{r}|^2$は，

$$|d\vec{r}|^2 = d\vec{r}d\vec{r} = |\vec{r}_u|^2 du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v dudv + |\vec{r}_v|^2 dv^2$$

$$= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

と表わせる。ここに，

$$E = |\vec{r}_u|^2,\ F = \vec{r}_u\vec{r}_v,\ G = |\vec{r}_v|^2 \tag{6}$$

とおいた。E，F，G を曲面の第一基本量という。上式(6)から，曲面上の点 A から点 B までの孤の長さ s は，

$$s = \int_A^B |\dot{\vec{r}}(t)| dt = \int_A^B \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\, dt \tag{7}$$

と書ける。上式の微分をとると,

$$ds=\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

両辺を自乗すれば,

$$ds^2-Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

この ds は曲面上の線素となる。また，面素 dS は，(6)の表式を用いて,

$$dS=|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|dudv=\sqrt{EG-F^2dudv}=\sqrt{\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}}dudv$$

と書ける。

［問題1］次のベクトル方程式はどんな曲面を表すか？
$(\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$は定数ベクトル，$a,b(a>b)$は定数)

(a) $\vec{r}(u,v)=\vec{a}u+\vec{b}v$　　(b) $\vec{r}=\left(x,y,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$

(c) $\vec{r}=((a+\cos v)\cos u,(a+\cos v)\sin u),b\sin v$

［問題2］次の曲面の単位法線ベクトル，面積要素ベクトル及びその大きさを求めよ($a,b(a>b)$ は定数)。

(a) $\vec{r}=\left(x,y,\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$　　(b) $\vec{r}=((a+\cos v)\cos u,(a+\cos v)\sin u,b\sin v)$

［問題3］曲面が陰関数表示$F(x,y,z)=0$で与えられているとき，単位法線ベクトルと曲面の表面積が,

$$\vec{n}=\frac{(F_x,F_y,F_z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},\qquad S=\int\int_D\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{F_z}dxdy$$

であることを示せ。$D=\{(x,y)\,|$ 曲面の xy 平面上への正射影$\}$である。

4．ベクトル場の微分

ここでは，場での微分演算子 ($grad,rot(curl),div$) がどのように導入されるかをみる。考えている場(空間) の各点にベクトルが対応付けられている場 (空間)をベクトル場という。言いかえれば，各点にベクトル関数が付随している，ということ。また，各点にスカラー関数が付随している場をスカラー場という。

ベクトル場$\vec{V}$が与えられているとき，曲線Cの各点Pにおける接線ベクトルが$\vec{V}(P)$と同じ方向をもつとき，曲線Cをベクトル$\vec{V}$の流線という(流体中の速度ベクトルと流れから由来する)。ベクトル場$\vec{V}$の流線$C:\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$の満たす条件は媒介変数を適当に選べば,

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\vec{V}(P(t))\longleftrightarrow\frac{dx(t)}{V_x}=\frac{dy(t)}{V_y}=\frac{dz(t)}{V_z}$$

と微分方程式で書ける。但し，Cは連続な曲線で特異点はないものとする。
ベクトル場とその流線の例：電場－電気力線　磁場－磁力線

［例題1］次の二次元ベクトル場を図示し，場の流線を求めよ。

(1) $\vec{V}=(x,y)$　(2) $\vec{V}=(y,x)$　(3) $\vec{V}=(x,-y)$　(4) $\vec{V}=(-y,x)$

［解］
(1) $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}$, $\log x=\log y+C$, $y=cx$　　(2) $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}$, $dx=ydy$, $x^2-y^2=c$

(3) $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{-y}$, $\log x=-\log y$, $xy=c$　　(4) $\dfrac{dx}{-y}=\dfrac{dy}{x}$, $xdx=-ydy$, $x^2+y^2=c$

線形変換①と微分②の復習から始めよう。

① 二変量 x,y の比例式を $\dfrac{y}{x}=A$，あるいは，$y=Ax$,（A は比例定数）とする。これを $x\xrightarrow{A}y$ と表し一次関数，あるいは一次写像という。$A\neq 0$ であれば，逆関数 $x=A^{-1}y$ が存在して，これを $y\xrightarrow{A^{-1}}x$ と表し逆写像（逆変換）という。

多変量 $x_i, y_j (i=1,2,\dots,n, j=1,2,\dots,m)$ の比例式（１次形式）

$$
\begin{array}{lll}
y_1 & = & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\quad\cdots\quad+a_{1n}x_n \\
y_2 & = & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\quad\cdots\quad+a_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots \\
y_m & = & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\quad\cdots\quad+a_{mn}x_n
\end{array}
$$

を行列形式で表せば

$$
\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\xrightarrow{A}\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=A\vec{x},\qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

と書ける。逆写像（逆変換）が存在するには，行列 A の行列式が $|A|\neq 0 (m=n)$ である（この行列を正則行列という）。このとき $\vec{x}=A^{-1}\vec{y}$，あるいは $\vec{y}\xrightarrow{A^{-1}}\vec{x}$ と表す（$AA^{-1}=A^{-1}A=E$（E は単位行列））。

行列 A の行と列を入れ替えた行列

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}={}^tA
$$

を転置行列（transposed matrix）という（${}^tA=A^{-1}$ のとき A を直交行列という）。これを用いて，行列（正方行列）の対称及び交代行列の定義が，

対称行列　${}^tA=A$　$(a_{ij}=a_{ji})$,　　　交代行列　${}^tA=-A$　$(a_{ij}=-a_{ji})$

と書ける。そして，$\dfrac{1}{2}(A+{}^tA)=S$，$\dfrac{1}{2}(A-{}^tA)=T$ であるから正方行列 A は,

$$
\frac{1}{2}(A+{}^tA)=S,\ \frac{1}{2}(A-{}^tA)=T\quad\longrightarrow\quad S+T=A \tag{1}
$$

と書ける（S,T はそれぞれ A の対称及び交代部分という。実対称行列の固有値は実数で，適当な一次変換によって対角化できる。実交代行列の固有値は０または純虚数である）。

② 一変数関数の微分；　一変数関数 $y=f(x)$ の導関数の定義式：

$$
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=y'(x) \tag{2}
$$

あるいは，上式と同値な形で

$$
f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\Delta x+o(|\Delta x|),\qquad \lim_{\Delta x\to 0}o(|\Delta x|)=0
$$

と書ける。$o(|\Delta x|)$ が無視できるとき（線形近似），$f'(x)dx$ を点 x での関数 $f(x)$ の微分といい dy で表す：

$$
dy=f'(x)dx
$$

これは局所的な一次関数で，$dx \xrightarrow{A} dy$の一次写像とみる。また，$dy=y-y_0, dx=x-x_0$と書きかえれば，

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

接線の方程式を得る。$f'(x_0)=A$は接線の傾き（微分係数：微分の幾何学的意味）で，その符号を調べることによって関数の局所的な増減がわかる。$f(x)\neq 0$ ならば，逆写像

$$dy \xrightarrow{A^{-1}} dx=\frac{1}{f'(x)}\,dy=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}\,dy \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$$

が存在する。

合成関数の微分：関数$y=f(x)=f(x(t)), x=x(t)$の媒介変数 t による微分は，

$$dt \longrightarrow dy=f'(x)dx=f'(x)x'(t)dt, \qquad \frac{dy}{dt} \Longleftrightarrow \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

と書ける。

多変数の微分を線形変換とみて定式化しよう。n-変数関数，即ち，n-変数スカラー関数$(y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n))$の微分 dy をとると，

$$dy=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+ \quad \cdots \quad +\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

$$=\nabla f\cdot d\vec{x}$$

ここで，記号∇は微分演算子でナブラと読む：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\nabla f=grad\ f, \qquad \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

内積の性質から$\nabla f\cdot d\vec{x}=d\vec{x}\cdot\nabla f=(d\vec{x}\cdot\nabla)f$と書きかえると，$d\vec{x}\cdot\nabla$は$d\vec{x}$方向への方向微分と解釈される。$\nabla f$はスカラー場$f$の勾配ベクトル（gradient vector）という。

n-変数ベクトル関数の成分を

$$\begin{array}{lcl} y_1 & = & f_1(x_1,x_2, \quad \cdots \quad ,x_n) \\ y_2 & = & f_2(x_1,x_2, \quad \cdots \quad ,x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ y_m & = & f_m(x_1,x_2, \quad \cdots \quad ,x_n) \end{array}$$

と表す[1]。各成分の微分をとれば

$$\begin{array}{lcl} dy_1 & = & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2+ \quad \cdots \quad +\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ dy_2 & = & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2+ \quad \cdots \quad +\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}dx_n \\ \vdots & & \vdots \\ dy_m & = & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}dx_2+ \quad \cdots \quad +\dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n \end{array}$$

[1] 座標系は直交座標系で単位直交ベクトル$\vec{e}_i\vec{e}_j=\delta_{ij}, i,j=(1,2,\dots,n)$の存在を仮定している。例えば，三次元での単位直交ベクトルは$\vec{e}_1-\vec{i},\vec{e}_2-\vec{j},\vec{e}_3-\vec{k}$とすればよい。ベクトル積（外積）の向きは$\vec{i}\times\vec{j}-\vec{k}$（"右手系"）に同じ。

行列形式で表せば（ $d\vec{x} \xrightarrow{A} d\vec{y}$の一次写像として），

$$d\vec{x}=\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \xrightarrow{A} d\vec{y}=\begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix}=Ad\vec{x}, \qquad A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

と書ける。Aを“微分写像”，あるいは，ベクトル場の勾配（$grad\ \vec{f}$）という。逆写像（逆変換）が存在するには，関数行列Aの行列式が$|A|\neq 0$，即ち，$m=n$である。この関数行列式を特にJacobianといい，$|J|$で表す。このとき，行列JをJacobi行列という。$d\vec{x}_0=\vec{x}-\vec{x}_0, d\vec{y}_0=\vec{y}-\vec{y}_0$と書き換えて，

$$\vec{y}-\vec{y}_0=A(\vec{x}-\vec{x}_0)$$

を超接平面の方程式（$n=m=1$のとき接線の方程式，$n=2, m=1$のとき接平面の方程式）という。

合成関数の微分：写像$d\vec{\omega} \xrightarrow{A} d\vec{y}$が二つの写像，$d\vec{\omega} \xrightarrow{B} d\vec{x}, d\vec{x} \xrightarrow{C} d\vec{y}$の合成であるとき，

$$d\vec{\omega} \xrightarrow{B} d\vec{x} \xrightarrow{C} d\vec{y}=Cd\vec{x}=CBd\vec{\omega}, \qquad A=CB$$

積CBは行列の積である。

一次変換（微分写像）Aを$A=S+T$と分解して，各項の意味付けを行う。簡単化して，二次元ベクトル場$\vec{f}=(f_1,f_2)$，一次変換行列A(2,2)で考察する。

$$A=grad\ \vec{f}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \qquad {}^tA=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$A=S+T$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

S（対称行列）は，適当な一次変換で対角化でき，かつ，行列AとSのTrace (Spur)は不変である：

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial f'_1}{\partial x'_1}+\frac{\partial f'_2}{\partial x'_2}$$

$\nabla\cdot\vec{f}=div\vec{f}$で表し，ベクトル場$\vec{f}$の発散(divergence)という。

T（交代行列）は，ベクトル積に書きかえると意味がとれる：

$$T \Longrightarrow \frac{1}{2}(\nabla\times\vec{f})=\frac{1}{2}\,rot\vec{f}$$

ここに，$rot\vec{f}$は，

$$\nabla\times\vec{f}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}=\left(0,0,\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

で，ベクトル場$\vec{f}$の回転（rotation, curl）という（z軸の回りの角速度の大きさを与える)。同様にしてA(3,3) 行列のときを書き下す：

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad {}^tA=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \qquad A=S+T$$

ここに，S,Tは，

$$S=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}+\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

である。S,Tは三次元ベクトル場での発散，回転になる。

［例題１］次の二次元ベクトル場の回転（$rot\vec{V}$）と発散（$div\vec{V}$）を求めよ。

(1) $\vec{V}=(x,y)$　(2) $\vec{V}=(y,x)$　(3) $\vec{V}=(x,-y)$　(4) $\vec{V}=(-y,x)$

［解］

(1) $rot\vec{V}=0,\quad div\vec{V}=2$　(2) $rot\vec{V}=0,\quad div\vec{V}=0$

(3) $rot\vec{V}=0,\quad div\vec{V}=0$　(4) $rot\vec{V}=2,\quad div\vec{V}=0$

［例題２］次の二次元ベクトル場の回転（$rot\vec{V}$）と発散（$div\vec{V}$）を求めよ（但し，原点(0,0)を除く)。

(1) $\vec{V}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$　(2) $\vec{V}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

(3) $\vec{V}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$　(4) $\vec{V}=\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

［解］

(1) $rot\vec{V}=0,\quad div\vec{V}=0$　(2) $rot\vec{V}=0,\quad div\vec{V}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(3) $rot\vec{V}=0,\quad div\vec{V}=0$　(4) $rot\vec{V}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad div\vec{V}=0$

［課題］次の三次元ベクトル場の流線，回転（$rot\vec{V}$）と発散（$div\vec{V}$）を求めよ。

(1) $\vec{V}=(x,y,z)$　(2) $\vec{V}=(z,y,x)$　(3) $\vec{V}=(z,x,-y)$　(4) $\vec{V}=(z,-y,x)$

5．grad，rot，div の意味

前節で定義されたように場の微分(ベクトル解析)に現れる演算子(grad, rot, div)は，微分演算子の集合体として新たな意味をもつ。言わば，それらを“イデオム”(idiom)として理解することになる(勿論，微分であるから何らかの変化率を意味することには替わりはない)。

スカラー場の勾配(gradient;grad)の意味から始めよう。

スカラー場での二点間の位置ポテンシャルの差 $d\phi$ は，

$$d\phi=\phi(\vec{r}+\Delta\vec{r})-\phi(\vec{r})=\phi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-\phi(x,y,z)$$

$$=\left\{\phi(x,y,z)+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z\right)+\cdots\right\}-\phi(x,y,z)$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z=\nabla\phi\cdot\Delta\vec{r}$$

と書ける。ここに，微分演算子 ∇ は$\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$である。$d\phi$ は，力場 $\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)$での点$A\longrightarrow B$への場のなす仕事 $\vec{F}\Delta\vec{r}$ に等しい：

$$d\phi=\nabla\phi\Delta\vec{r}=\vec{F}\Delta\vec{r}\quad\Longleftrightarrow\quad\nabla\phi=\vec{F}\tag{1}$$

後者の関係式は，一般には，力(場の強さ)はポテンシャルの微分によって決まる，と表現される。その ϕ をスカラーポテンシャルという。仕事が零$d\phi=\nabla\phi\cdot d\vec{r}=0$ならば，$\nabla\phi\perp d\vec{r}$。つまり，$\phi=$ 定数の面（曲線）は等ポテンシャル面(曲線）であるから，力の方向（$\nabla\phi$）とポテンシャル面（曲線）に沿っての変位（$d\vec{r}$）が直交している。これを，力線と等ポテンシャル面（曲線）は直交するという。

次のような任意の方向の単位ベクトル(単位方向ベクトル)$\vec{s}=\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$,$|\vec{s}|=1$を導入する。この単位方向ベクトル$\vec{s}$を用いて，

$$\lim_{h\to0}\frac{\phi(\vec{r}+h\vec{s})-\phi(\vec{r})}{h}\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{d\phi}{ds}\tag{2}$$

を方向微分（係数）という。左辺の$\phi(\vec{r}+h\vec{s})$を展開して，整理すれば，

$$(2)\quad=\quad\lim_{h\to0}\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}hs_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}hs_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}hs_z}{h}=\vec{s}\,\nabla\phi=|\vec{s}||\nabla\phi|\cos\theta=|\nabla\phi|\cos\theta$$

となる。上式で $\cos\theta=1\longrightarrow\vec{s}\parallel\nabla\phi$で，方向微分係数は$|\nabla\phi|$，即ち，その点での最大傾斜を与える。これが，$\nabla\phi$ を勾配（gradient）という由来である。それで，$\nabla\phi=\mathrm{grad}\phi$と書く。ここで，単位法線ベクトル$\vec{n}=\frac{\Delta\phi}{|\Delta\phi|}$，$|\vec{n}|=1$を導入すれば，$\frac{d\phi}{dn}=\vec{n}\,\nabla\phi=|\nabla\phi|$と書ける。

上記(1)での後者の式の両辺を $A\longrightarrow B$ まで線積分すれば，

$$\int_A^B\nabla\phi d\vec{r}=\int_A^B\mathrm{grad}\phi d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A)=\int_A^B\vec{F}d\vec{r}\tag{3}$$

と書ける。従って，変位 $A\longrightarrow B$ に対する仕事量は経路に依らない。更に，$A\longrightarrow B\longrightarrow A$ と一周すれば，仕事は零である（時計と反対周りを正と約束する）：

$$\oint\vec{F}d\vec{r}=\oint\nabla\phi d\vec{r}=0\tag{4}$$

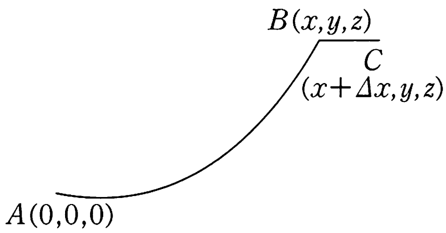
このような場を保存力場（conservative force field）という。即ち，力がポテンシャルのみによって決まる場である。

［例題１］$\oint \vec{F}d\vec{r}=0$ならば，$\vec{F}=\nabla\phi$を満たすϕがあることを示せ。

［解］二点$A=(0,0,0)$, $B=(x,y,z)$間の終点Bからx軸に平行な微小線分BC(点Cの座標$(x+\Delta x,y,z)$)をとる（右図)。

位置Aに対するCのポテンシャルは，

図．線積分の経路



$$\phi(x+\Delta x,y,z)=\int_{ABC}\vec{F}d\vec{r}=\int_{AB}\vec{F}d\vec{r}+\int_{BC}\vec{F}d\vec{r}$$

$$\phi(x,y,z)=\int_{x}^{x+\Delta x}F_x(x,y,z)dx$$

となる。

$$\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)=\int_{x}^{x+\Delta x}F_x(x,y,z)dx$$

であるから，$C\longrightarrow B$の極限をとれば，

$$\lim_{\substack{C\to B\\(\Delta x\to 0)}}\frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{\partial\phi}{\partial x}=F_x(x,y,z)$$

を得る。y,z成分に関しても，同様にして，$\dfrac{\partial\phi}{\partial y}=F_y(x,y,z)$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=F_z(x,y,z)$を得る。即ち，$\vec{F}=\nabla\phi$となる$\phi$が存在する。

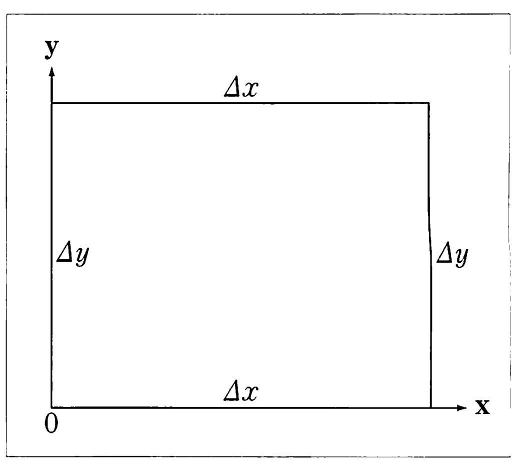
［例題２］例題(1)-(4)のベクトル場の$\oint\vec{V}d\vec{r}$を計算し，$\oint\vec{F}d\vec{r}=0$ならば，$\vec{V}=\nabla\phi$を満たすϕを求めよ。

［解］(1)-(3)の$\oint\vec{V}d\vec{r}=0$，(4)$\oint\vec{V}d\vec{r}=2\pi\neq 0$. スカラーポテンシャルは次の通り：

(1)　$\phi=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$　　(2)　$\phi=xy$　　(3)　$\phi=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$

(4)式の線積分（周回積分という）を，まず，右図のようなxy平面上の微小長方形の辺を一周する場合について考察しよう：

図．循環経路



$$\begin{aligned}\oint\vec{F}d\vec{r}&=\int_0^{\Delta x}F_xdx+\int_0^{\Delta y}F_ydy\\&\quad+\int_{\Delta x}^{0}F_xdx+\int_{\Delta y}^{0}F_ydy\\&\simeq F\left(\frac{\Delta x}{2},0\right)\Delta x+F\left(\Delta x,\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y\\&\quad-F\left(\frac{\Delta x}{2},\Delta y\right)\Delta x-F\left(0,\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta y\end{aligned}$$

と近似する。整理して，

$$-\left[F\left(\frac{\Delta x}{2},0\right)-F\left(\frac{\Delta x}{2},\Delta y\right)\right]\Delta x+\left[F\left(\Delta x,\frac{\Delta y}{2}\right)-F\left(0,\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta y$$

$$=\left[F\left(\frac{\Delta x}{2},0\right)-\left\{F\left(\frac{\Delta x}{2},0\right)+\frac{\partial F\left(\frac{\Delta x}{2},0\right)}{\partial y}\Delta y+\cdots\right\}\right]\Delta x$$

$$+\left[\left[\left\{F\left(0,\frac{\Delta y}{2}\right)+\frac{\partial F\left(0,\frac{\Delta y}{2}\right)}{\partial x}\Delta x+\cdots\right\}-F\left(0,\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta y\right.$$

$$=\left(\frac{\partial F\left(0,\frac{\Delta y}{2}\right)}{\partial x}-\frac{\partial F\left(\frac{\Delta x}{2},0\right)}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y=(\nabla\times\vec{F})_z\Delta x\Delta y$$

この周回積分を z 軸方向の回りの循環量（あるいは渦度）という。同様の手続きを yz,zx 平面上で繰り返せば，x,y 軸方向の回りの循環量$(\nabla\times\vec{F})_x$, $(\nabla\times\vec{F})_y$を得る。上記の関係式は一般化して，

$$\oint\vec{F}d\vec{r}=\iint_S\nabla\times\vec{F}\,d\vec{S}\tag{5}$$

と書ける[2]。ここに，$\oint$の周回積分路は，曲面 S の境界線でなければならない。こうして，$\nabla\times\vec{F}$の定義式を，

$$\nabla\times\vec{F}\overset{\text{def}}{=}\lim_{S\to 0}\frac{\oint\vec{F}d\vec{r}}{S}\tag{6}$$

と書く。上式は，$S\to 0$ の極限点の循環量（あるいは渦度の強さ）を表す。これが，回転（rotation あるいは，curl）と呼ばれる所以である。こうして，$\nabla\times\vec{F}=\mathrm{rot}\vec{F}=\mathrm{curl}\vec{F}$と記す。特に，$\oint\vec{F}d\vec{r}=0$，つまり，$\oint\vec{F}d\vec{r}=\iint_S\nabla\times\vec{F}d\vec{S}=0$ならば，$\mathrm{rot}\vec{F}=0$。$rot\vec{F}=0$（渦無し）のベクトル場を非回転場，あるいは，層状場（Lamellar field）という。このとき，$\vec{F}$がポテンシャルによって決まる場，つまり，保存力場であれば，$\mathrm{rot}\vec{F}=\mathrm{rot}(\nabla\phi)=\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi)=0$。

［例題 3］$\mathrm{rot}\vec{F}=0$のとき，$\vec{F}=(F_x,F_y,F_z)=-\nabla\phi$を満たす ϕ は

$$\phi(x,y,z)=\int_0^x F_x(x,y,z)dx+\int_0^y F_y(0,y,z)dy+\int_0^z F_z(0,0,z)dz\tag{7}$$

と書けることを示せ[3]。

［解］$\nabla\phi$ を直接計算すれば，

$$\vec{F}=\nabla\phi$$

$$=\left(\vec{F}_x(x,y,z),\ \int_0^x\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial y}dx+F_y(0,y,z),\ \int_0^x\frac{\partial F_x(x,y,z)}{\partial z}dx+\int_0^y\frac{\partial F_y(0,y,z)}{\partial z}dy+F_z(0,0,z)\right)$$

条件$\mathrm{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z},\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x},\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)=0$を用いて，$F_y,F_z$成分を書き換える：

$$F_y=\int_0^x\frac{\partial F_x}{\partial y}dx+F_y(0,y,z)=\int_0^x\frac{\partial F_y}{\partial x}dx+F_y(0,y,z)$$
$$=[F_y(x,y,z)-F_y(0,y,z)]-F_y(0,y,z)=F_y(x,y,z)$$

---

2 二次元のとき，$\int_C F_xdx+F_ydy=\iint\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy$ を特に，「平面上の Green の定理」という。

3 見方を変えて，全微分$(d\phi)$が，$F(x,y,z)dx+G(x,y,z)dy+H(x,y,z)dz-0$で，$\vec{F}-(F,G,H)$として$\mathrm{rot}\vec{F}-0$のとき，$F(x,y,z)dx+G(x,y,z)dy+H(x,y,z)dz-0$を完全微分方程式という。この方程式の解は，(7)で与えられる。

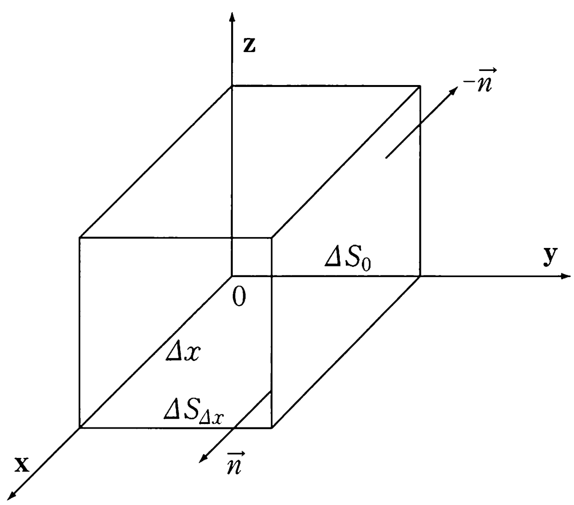
$$F_z=\int_0^x \frac{\partial F_x}{\partial z}dx+\int_0^y \frac{\partial F_y}{\partial z}dy+F_z(0,0,z)=\int_0^x \frac{\partial F_z}{\partial x}dx-\int_0^y \frac{\partial F_z}{\partial y}dy+F_z(0,0,z)$$
$$=[F_z(x,y,z)-F_z(0,y,z)]+[F_z(0,y,z)-F_z(0,0,z)]+F_z(0,0,z)=F_z(x,y,z)$$

即ち，

$$\nabla\phi=(F_x(x,y,z),F_y(x,y,z),F_z(x,y,z)=\vec{F}$$

となる ϕ が存在する。

［例題４］［例題１］(1)-(4)の中で$rot\vec{V}=0$のベクトル場のスカラーポテンシャルを求めよ。
［解］［例題１］(1)-(3)が$rot\vec{V}=0$で，解は上述の［例題２］(1)-(3)の解に同じ。



(1)に戻って，両辺に ∇ を掛ける（内積をとる)と，

$$\nabla(\nabla\phi)=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

となる。$\nabla\cdot\vec{F}$式の意味を理解するのに次のような考察を行う。上図のような微小直方体において，まず，x 軸に垂直は二つの微小面積（$\Delta S_0,\Delta S_{\Delta x}$）を横切る流量－$\Delta S_0$からの流入量と$\Delta S_{\Delta x}$からの流出量の差－を計算する（$\pm\vec{n}$は面$\Delta S_0$と$\Delta S_{\Delta x}$の法線ベクトル)：

$$\left(\iint_{\Delta S}\vec{F}d\vec{S}\right)_x=\iint_{\Delta S_{\Delta x}}F_{x+\Delta x}dydz-\iint_{\Delta S_0}F_xdydz\simeq\left[F_x\left(\Delta x,\frac{\Delta y}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)-F_x\left(0,\frac{\Delta y}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\Delta y\Delta z$$

$$=\left[\left\{F_x\left(0,\frac{\Delta y}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)+\frac{\partial F_x\left(0,\frac{\Delta y}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)}{\partial x}\Delta x+\cdots\right\}-F_x\left(0,\frac{\Delta y}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)\right]\Delta y\Delta z$$

$$=\frac{\partial F_x\left(0,\frac{\Delta y}{2},\frac{\Delta z}{2}\right)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial F_x}{\partial x}\Delta v(\Delta v=\Delta x\Delta y\Delta z)$$

y,z 軸方向に対しても同様にして，$\left(\iint_S\vec{F}d\vec{S}\right)_y=\frac{\partial F_y}{\partial y}\Delta v$，$\left(\iint_S\vec{F}d\vec{S}\right)_z=\frac{\partial F_z}{\partial z}\Delta v$を得る。まとめて，

$$\iint_S\vec{F}d\vec{S}\simeq\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\Delta v=\nabla\vec{F}\Delta v$$

と書ける。この関係式を一般化して，

$$\iint_S \vec{F} d\vec{S} = \iiint_V \nabla \vec{F} dV \tag{8}$$

と書く。ここに，曲面 S は，ベクトル場$\vec{F}$の微少体積 V の境界面でなければならない。これより，$\nabla \cdot \vec{F}$の定義式は，

$$\nabla \cdot \vec{F} \overset{\text{def}}{=} \lim_{V \to 0} \frac{\iint_S \vec{F} d\vec{S}}{V} \tag{9}$$

と書ける。こうして，$\nabla \cdot \vec{F}$の意味は，$V \to 0$ の極限点からの流出量（湧き出し量）となる。これが，$\nabla \cdot \vec{F}$を発散(divergence)という由来である（$\nabla \cdot \vec{F} = \mathrm{div}\vec{F}$）。$\mathrm{div}\vec{F}=0$（発散無し）のベクトル場を非回転場，管状ベクトル場（Solenoidal field）等という。$\mathrm{div}\vec{F}=0$で，任意のベクトル$\vec{X}$において，$\iiint_V \nabla \vec{F} dV = \iint_S \vec{X} d\vec{S}$が成り立つには，

$$\vec{X} = \mathrm{rot}\vec{F} + \nabla \phi \tag{10}$$

であればよい（$\mathrm{div}\cdot\mathrm{rot}\vec{X}=0$）。このとき，$\vec{F}$をスカラーポテンシャルと対比して，$\vec{X}$のベクトルポテンシャルという。

［例題３］$\mathrm{div}\vec{F}=0$のとき，$\vec{F}=(F_x, F_y, F_z)=\mathrm{rot}\vec{A}$を満たす$\vec{A}$は，

$$\vec{A} = \left(0, \int_0^x F_z(x,y,z)dx, -\int_0^x F_y(x,y,z)dx + \int_0^y F_x(0,y,z), dy\right)$$

であることを示せ。

［解］$\mathrm{rot}\vec{A}$を直接計算すれば，

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \left(-\int_0^x \frac{\partial F_z(x,y,z)}{\partial z}dx - \int_0^x \frac{\partial F_y(x,y,z)}{\partial y}dx + F_x(0,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\right)$$

となる。ここに，$\mathrm{div}\vec{F}=0$から$-\left(\frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x}$を用いて，$F_x$成分を書き換えと，

$$(\mathrm{rot}\vec{A})_x = F_x = \int_0^x \frac{\partial F_x}{\partial x}dx + F_x(0,y,z) = [F_x(x,y,z) - F_z(0,y,z)] + F_z(0,y,z) = F_x(x,y,z)$$

よって，$\mathrm{rot}\vec{A}=(F_x, F_y, F_z)=\vec{F}$を得る。

$\vec{A}$は，

$$\left(\int_0^z F_y(x,y,z)dz, -\int_0^z F_x(x,y,z)dz + \int_0^x F_z(x,y,0)dx, 0\right)$$

$$\left(-\int_0^y F_z(x,y,z)dy + \int_0^z F_y(x,0,z)dz, 0, \int_0^y F_x(x,y,z)dy\right)$$

としても同じ結果を与える。

［問題１］［例題１］(1)-(4)の中で$div\vec{V}=0$（$\vec{V}=(x,y,0)$のように考える）のベクトル場のベクトルポテンシャルを求めよ。

［解］

	rot	div	ϕ	$\vec{A}$
(1)	0	2	$\frac{1}{2}(x^2+y^2)$	
(2)	0	0	xy	$(0,0,\frac{1}{2}(x^2-y^2))$
(3)	0	0	$\frac{1}{2}(x^2-y^2)$	$(0,0,xy)$
(4)	2	0		$(0,0,\frac{1}{2}(x^2+y^2))$

［問題２］［例題２］(1)-(4)の中で$rot\vec{V}=div\vec{V}=0$のように考える）のスカラー及びベクトルポテンシャルを求めよ。

［解］

	rot	div	ϕ	$\vec{A}$
(1)	0	0	$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$	$(0,0,-\tan^{-1}\frac{x}{y})$
(2)	0	$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$\sqrt{x^2+y^2}$	
(3)	0	0	$\tan^{-1}\frac{x}{y}$	$(0,0,-\frac{1}{2}\log(x^2+y^2))$
(4)	$-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	0		$(0,0,-\sqrt{x^2+y^2})$

6．積分公式（Green-Ostrogradosky-Gauss-Stokes）

この章での内容は，前章のそれらの繰り返しで，視点を代えて述べただけである。それは，「積分公式」を微・積分の基本定理(fundamental theorem of calculus)の高次元化として捉えることである。それによって，「積分公式」が統一的に理解できる。ここでは，「平面上の Green の公式」を理解の要とした。

平面上で閉曲線 C の内部の面積が C に関する線積分で表せることを示そう：

領域は簡単化して，図のように長方形 ABCD として，その縁を閉曲線 C とする（閉曲線としては，一般的には，区分的滑らかな単一閉曲線であればよい）。長方形 ABCD の面積は，

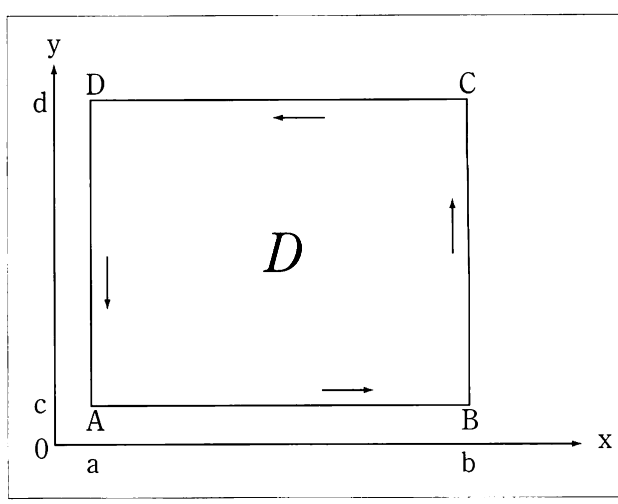
$$S=\iint_D dxdy=\int_a^b\left\{\int_c^d dy\right\}dx$$

$$-\int_c^d\left\{\int_a^b dx\right\}dy-(b-a)(d-c)$$

である。まず，次の等式

$$S=\iint_D dxdy=-\oint_C ydx=-\oint_C xdy \qquad (1)$$

循環経路



が成り立つことを示す。$\oint_C ydx$を線積分の定義に従って書き下すと，

$$\oint_C ydx=\int_a^b cdx+\int_b^a ddx=\int_a^b(c-d)dx=(b-a)(c-d)=-(b-a)(d-c)=S$$

求める等式$S=\oint_C -ydx$を得る（y 軸に平行な線分 BC,DA 上では $dx=0$ で積分への寄与はゼロである）。

上式$\int_a^b (c-d)dx$を次のように二重積分に書きかえる：

$$\int_a^b (c-d)dx = \int_a^b [y]_d^c dx = \int_b^a \left\{\int_d^c dy\right\} dx = -\int_a^b \int_c^d dxdy = S \tag{2}$$

xとyを交換し，上に同様な計算を行えば，

$$\oint_C xdy = b\int_c^d dy + a\int_d^c dy = (b-a)\int_c^d dy = (b-a)(d-c) = S$$

を得る（x軸に平行な線分AB,DC上では$dy=0$で積分への寄与はゼロ）。また，二重積分への書き換えは，

$$\int_c^d (b-a)dy = \int_c^d [x]_a^b dy = \int_d^c \left\{\int_a^b dy\right\} dy = \int_a^b \int_c^d dxdy \tag{3}$$

となる。こうして，面積Sは上式をまとめて，

$$S = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\oint_C (-ydx + xdy) \tag{4}$$

と書く。この等式を利用して，$y=P(x,y), x=Q(x,y)$と置き換えると次の等式

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint_C P(x,y)dx, \quad \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_C Q(x,y)dy \tag{5}$$

が成り立つ。

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b \left\{\int_c^d \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy\right\} dx = \int_a^b [P(x,y)]_c^d dx - \int_a^b \{P(x,d) - P(x,c)\} dx \tag{6}$$

他方，

$$\oint_C P(x,y)dx = \int_a^b P(x,c)dx + \int_b^a P(x,d)dx = \int_a^b \{P(x,c) - P(x,d)\} dx = -\int_a^b \{P(x,d) - P(x,c)\} dx \tag{7}$$

(6)，(7)式から，$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\oint_C P(x,y)dx$が成り立つことがわかる。同様にして，$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_C Q(x,y)dy$についても成り立つ。(5)式を一つの式で書けば

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy \tag{8}$$

と書ける。これを「平面上のGreenの公式」という。ベクトル形式で書けば，

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{f}\cdot\vec{t}ds = \oint_C f_t ds = \iint_D rot\vec{f}\cdot\vec{k}dS$$

と書ける。これを二次元のStokesの公式ともいう。ここに，f_tは$\vec{f}$の接線方向の成分である。最初の置き換えを逆にして($P(x,y)=y, Q(x,y)=x$)，Greenの公式に適用すると，

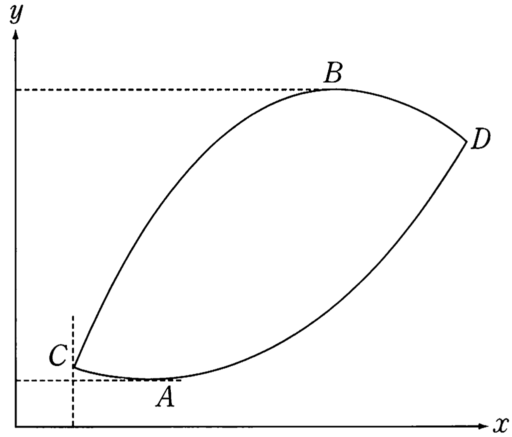
$$\oint_C (-ydx + xdy) = \iint_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right) dxdy = 2\iint_D dxdy = 2S$$

で，(4)式を確認できる。

［例題］領域を長方形に代えて，図のような閉曲線とする。こうしても，(5)式が成り立っていることを示せ。

［解］図の閉曲線と x,y 軸に平行な交点を A,B,C,D，曲線 ACB,BDA をそれぞれ $y=Y_1(x)$, $y=Y_2(x)$ とする。

図. 線積分の経路



$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy=\int_a^b\left\{\int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\right\}dx$$

$$=\int_a^b\Big[P(x,y)\Big]_{Y_1(x)}^{Y_2(x)}dx$$

$$=\int_a^b\{P(x,Y_2(x))-P(x,Y_1(x))\}dx$$

$$=-\int_b^a P(x,Y_2(x))dx-\int_a^b P(x,Y_1(x))dx$$

$$=-\left(\int_{ACB}P(x,Y_1(x))dx+\int_{BDA}P(x,Y_2(x))dx\right)=-\oint_C P(x,y)dx$$

同様にして，曲線 DAC,CBD をそれぞれ $x=X_1(y)$, $x=X_2(y)$ とすると，

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dxdy=\int_c^d\left\{\int_{X_1(y)}^{X_2(y)}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dy\right\}dy=\int_c^d\Big[Q(x,y)\Big]_{X_1(y)}^{X_2(y)}dy$$

$$=\int_c^d\{Q(x,X_2(y))-Q(x,X_1(y))\}dy=\int_c^d Q(x,X_2(y))dy-\int_c^d Q(x,X_1(y))dy$$

$$=\int_{DAC}P(x,X_1(y))dy+\int_{CBD}Q(x,X_2(y))dy=\oint_C Q(x,y)dy$$

［課題］三次元空間内での閉曲線 C で囲まれた領域内の曲面で考えると，Green の公式は次のように拡張できる(P,Q,R は (x,y,z) の関数，$Q_x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$P_y=\dfrac{\partial P}{\partial y},\cdots$を意味する（以下同様））：

$$\oint_C Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S(Q_x-P_y)dxdy+(R_y-Q_z)dydx+(P_z-R_x)dzdx$$

曲面 S の法線ベクトルの方向余弦 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ とすれば，

$$dxdy-\cos\gamma dS,\quad dydz-\cos\beta dS,\quad dzdx-\cos\alpha dS$$

で，$\vec{f}=(P,Q,R)$，$d\vec{r}=(dx,dy,dz)$ とすれば上式は，

$$\oint\vec{f}\cdot d\vec{r}=\iint_S rot\vec{f}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S rot\vec{f}\cdot d\vec{S}$$

と書ける。この式を Stokes の公式という。この式からも $rot\vec{f}$ の意味付けができる：

$$rot\vec{f}=\lim_{S\to 0}\frac{\oint\vec{f}d\vec{r}}{S}$$

上記での閉曲線に関する線積分と面積分との関係は，閉曲面に関する面積分と体積分の関係を示唆する：P,Q,R を (x,y,z) の関数として，S は三次元空間での閉曲面，V はその閉曲面に囲まれた領域とすれば，

$$\iiint_V P_x\,dxdydz=\iint_S Pdydz,\quad \iiint_V Q_y\,dxdydz=\iint_S Qdzdx,\quad \iiint_V R_z\,dxdydz=\iint_S Pdxdy \qquad (9)$$

が成り立つ。その前に二次元の等式について考察する：

$$\iint_D P_x(x,y)dxdy=\oint_C P(x,y)dy,\ \iint_D Q_y(x,y)dxdy=-\oint_C Q(x,y)dx \tag{10}$$

領域 D は，上述と同様，長方形としておく。

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}dxdy=\int_c^d \Big[P(x,y)\Big]_{x=b}^{x=b}dy=\int_c^d \{P(b,y)-P(a,y)\}dy \tag{11}$$

他方，

$$\oint_C P(x,y)dy=\int_c^d P(b,y)dy+\int_d^c P(a,y)dy=\int_c^d \{P(b,y)-P(a,y)\}dy$$
$$=\int_c^d \{P(b,y)-P(a,y)\}dx \tag{12}$$

(11)，(12)式から，$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}dxdy=\oint_C P(x,y)dy$ が成り立つことがわかる。同様にして，$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}dxdy=-\oint_C Q(x,y)dx$ についても成り立つ。(10)式を一つの式で書けば

$$\oint_C -Q(x,y)dx+P(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)dxdy \tag{13}$$

となる。これを二次元の Gauss の公式という。ベクトル形式で書けば，

$$\oint_C \vec{f}\cdot\vec{n}ds=\oint_C f_n ds=\iint_D div\vec{f}dS$$

となる。ここに，f_nは$\vec{f}$の法線方向の成分である。

三次元の場合の第三式について説明する（前章の図参照。x-方向を z-方向に替えただけ）。簡単化した直方体の閉曲面を考える。z 軸に平行な面をそれぞれ$S_{z_1}, S_{z_2}(z_1<z_2)$とする。面$S_{z_1}, S_{z_2}$での法線ベクトルの向きは逆だから，$S_z$の成分は$S_z=S_{z_2}-S_{z_1}$である。

$$\iiint_V R_z\, dxdydz=\iint_{S_1}\Big[R(x,y,z)\Big]_{z=z_1}^{z=z_2}dxdy=\iint_{S_1}(R(x,y,z_2)-(R(x,y,z_1))dxdy$$
$$=\iint_{S_{z_2}}R(x,y,z_2)-\iint_{S_{z_1}}R(x,y,z_1)dxdy \tag{14}$$

他方，

$$\iint_{S_z}R(x,y,z)dxdy=\iint_{S_{z_2}}R(x,y,z_2)-\iint_{S_{z_1}}R(x,y,z_1)dxdy \tag{15}$$

上式(14)，(15)から第三式が成り立つことがわかる。同様にして，第一，二式が成り立つことがわかる。よって，上式(9)式をまとめて書けば，

$$\iiint_V (P_x+Q_y+R_z)dxdydz=\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy \tag{16}$$

ベクトル形式で書けば，

$$\iiint_V div\vec{f}dV=\iint_S \vec{f}\cdot\vec{n}dS=\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S}$$

である。これを Gauss の公式という。この式からも$div\vec{f}$の意味付けができる：

$$div\vec{f}=\lim_{V\to 0}\frac{\iint_S \vec{f}d\vec{S}}{V}$$

［課題］直方体を卵形に変形しても(16)式が成り立っていることを示せ。さらに，Sの形が複雑な場合，例えば，図のようなときにも成り立つことを示せ。

7．微分形式（Differential form）

上述では，ポテンシャル関数$\phi(r)=\phi(x,y,z)$の全微分を，

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

と表した。そして，$d\phi=0$がϕを決める全微分方程式であるから解として，$\phi(x,y,z)=c$（cは定数）を得ることができた。以下では，dx,dy,dzを$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$のように独立の基底（生成元）とみなして，それらに対応する(変数）係数を$f(x,y,z),g(x,y,z),h(x,y,z)$とする。まず，$dx,dy,dz$に関する演算の規則及び記号$\Lambda$(Wegdeと読む)を導入する：

1) $dx\ \Lambda\ dx=dy\ \Lambda\ dy=dz\ \Lambda\ dz=0$
2) $dx\ \Lambda\ dy=-dy\ \Lambda\ dx, dy\ \Lambda\ dz=-dz\ \Lambda\ dy, dz\ \Lambda\ dx=-dx\ \Lambda\ dz$ （交代性）
3) $dx\ \Lambda\ (dy+dz)=dx\ \Lambda\ dy+dx\ \Lambda\ dz$ （分配則）
4) $cdx\ \Lambda\ dy=c(dx\ \Lambda\ dy)=dx\ \Lambda\ cdy$ （スカラー倍）
5) $(dx\ \Lambda\ dy)\ \Lambda\ dz=dx\ \Lambda\ (dy\ \Lambda\ dz)=dx\ \Lambda\ dy\ \Lambda\ dz$ （結合則）

以上の演算（外積代数）はベクトルの外積（ベクトル積：×）のそれらに類似しているが，5)は明らかに異なる。5)に相当するベクトル積（三重積）は，

$$(dx\times dy)\times dz\neq dx\times(dy\times dz)$$

であり，

$$(dx\times dy)\times dz=(dx\cdot dz)\times dy-(dy\cdot dz)\times dx$$

$$dx\times(dy\times dz)=(dx\cdot dz)\times dy-(dx\cdot dy)\times dx$$

である。尚，記号Λは省略されて，

$$dx\ \Lambda\ dy=dxdy,\quad -dy\ \Lambda\ dx=-dydx,\quad dx\ \Lambda\ dy\ \Lambda\ dz=dxdydz$$

等々で記されることが多い。特に，積分記号下では，

$$dx\ \Lambda\ dy=dxdy=dS,\quad dx\ \Lambda\ dy\ \Lambda\ dz=dxdydz=dv$$

等々の省略が頻繁に起こる。ここで，外積代数の演算練習をしておこう。

［例題1］$\omega_1=a_1dx+b_1dy$，$\omega_2=a_2dx+b_2dy$として次式を示せ。

a) $\omega_i\ \Lambda\ \omega_i=0(i=1,2)$，b) $\omega_i\ \Lambda\ \omega_i=-\omega_j\ \Lambda\ \omega_i(i,j=1,2)$，c) $\omega_1\ \Lambda\ \omega_2=c\ dx\ \Lambda\ dy,\ c=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$

［解］

a) $\omega_i\ \Lambda\ \omega_i=(a_idx+b_idy)\ \Lambda\ (a_idx+b_idy)$

$$=a_i^2\,dx\ \Lambda\ dx+a_ib_i\,dx\ \Lambda\ dy+a_i^2\,dy\ \Lambda\ dx+b_ia_i\,dy\ \Lambda\ dy$$

$$=a_ib_i(dx\ \Lambda\ dy+dy\ \Lambda\ dx)=0$$

b) $\omega_i\ \Lambda\ \omega_i=(a_idx+b_idy)\ \Lambda\ (a_idx+b_idy)=a_ib_j\,dx\ \Lambda\ dy+a_jb_i\,dy\ \Lambda\ dx$

$$=-(a_ib_j\,dy\ \Lambda\ dx+a_jb_i\,dx\ \Lambda\ dy)=-\omega_j\ \Lambda\ \omega_i$$

c）$\omega_1 \Lambda\, \omega_2=(a_1dx+b_1dy)\Lambda(a_2dx+b_2dy)$

$$=a_1a_2dx\ \Lambda\ dx+a_1b_2dx\ \Lambda\ dy+b_1a_2dy\ \Lambda\ dx+b_2a_1dy\ \Lambda\ dy=a_1b_2dx\ \Lambda\ dy+b_1a_2dy\ \Lambda\ dx$$

$$=(a_1b_2-b_1a_2)dx\ \Lambda\ dy=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} dx\ \Lambda\ dy$$

［課題］$\omega_1=a_1dx+b_1dy+c_1dz$，$\omega_2=a_2dx+b_2dy+c_2dz$，$\omega_3=a_3dx+b_3dy+c_3dz$として次式を示せ。

a）$\omega_i\ \Lambda\ \omega_i=0,(i=1,2,3)$　b）$\omega_i\ \Lambda\ \omega_j=-\omega_i\ \Lambda\ \omega_i$，$(i,j=1,2,3)$

c）$\omega_1\ \Lambda\ \omega_2\ \Lambda\ \omega_3=c\ dx\ \Lambda\ dy\ \Lambda\ dz,\ c=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix}$

関数f,g,hは，定義域（D）において連続かつ何回でも微分可能とする。こうして，任意の関数$\phi(x,y,z)$に関して，その微分式（全微分）

$$d\phi=f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz=\vec{F}d\vec{r} \tag{1}$$

を作る。これを一次外微分形式，略して，一次微分形式，あるいは，単に，１形式という。関数ϕを０形式という（$d\phi$を外微分という）。記号dは，関数ϕ（０形式）に作用して１形式を作る。より一般的に言えば，記号dは微分形式の次数を一つ上げる演算子である。形式的には，関数ϕにdをn回作用させればn微分形式ができることになる（R^3では，０次から３次の微分形式ができる）。ここで，記号dの幾つかの演算規則を上げておこう：

1）関数ϕ_1,ϕ_2について，$d(\phi_1+\phi_2)=d\phi_1+d\phi_2$　　（線形性）
　一般に，任意のn形式ω_1,ω_2について，$d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$
2）関数ϕとn形式ωについて，$d(\phi\omega)=d\phi\omega+\phi d\omega$
3）関数ϕについて，$d(d\phi)=d^2\phi=0$
4）n形式ω_1,ω_2について，
　$d(\omega_1\ \Lambda\ \omega_2)=d\omega_1\ \Lambda\ \omega_2+(-1)^n\omega_1\ \Lambda\ d\omega_2$
5）n形式ωについて，$d(d\omega)=d^2\omega=0$

(1)式の右辺を形式的にベクトル表示して，

$$d\phi=\omega=\vec{G}d\vec{r},\ \vec{G}=(f,g,h),\ d\vec{r}=(dx,dy,dz) \tag{2}$$

と記す。領域D内の曲線Cに対して１形式ωの積分を，

$$\int_C \omega=\int_C f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy+h(x,y,z)dz \tag{3}$$

で定義する。特に，関数ϕが一変数の場合，線分Cの両端（下・上限：∂C)をa,bとすれば，

$$\int_a^b d\phi=\phi(b)-\phi(a) \tag{4}$$

と書ける（微積分の基本定理)。これを$\int_{\partial C}\phi=\int_C d\phi$と表わし，関$\phi$（０形式）の積分は，その関数の微分式（１形式)の積分に等しい，と読む。

１形式の表式で重要になるのは，

$$d\phi=\omega=\mathrm{grad}\phi=\nabla\phi \tag{5}$$

の型に書けるときである。このとき，１形式の積分(3)は，

$$\int_C \omega = \int_C \mathrm{grad}\phi d\vec{r} \tag{6}$$

と書ける。曲線 C が閉曲線であれば，$\oint \mathrm{grad}\phi d\vec{r}=0$。このとき $\omega=d\phi$ の ω を完全形式という。

次に，2形式 φ，つまり，1形式の外微分（$d\phi$ の微分式）を，

$$\begin{aligned}d\omega=d(d\phi)=d^2\phi&=df \wedge dx+dg \wedge dy+dh \wedge dz\\&=(f_x dx+f_y dy+f_z dz)\wedge dx+(g_x dx+g_y dy+g_z dz)\wedge dy+(h_x dx+h_y dy+h_z dz)\wedge dz\\&=\varphi\end{aligned}$$

で定義する（$f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}, f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y},\cdots$）。上述の演算規則によって上式をベクトル表式で整理すれば，

$$\begin{aligned}d\omega=d(d\phi)=d^2\phi&=(h_y-g_z)dy \wedge dz+(f_z-h_x)dz \wedge dx+(g_x-f_y)dx \wedge dy\\&=\mathrm{rot}\vec{G}d\vec{S}\end{aligned} \tag{7}$$

となる。$d\phi$ が ϕ の全微分であれば，

$$g_x-f_y=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=0 \tag{8}$$

等々より，$\mathrm{rot}\vec{G}=0$ であるから(7)式は，

$$d\omega=d(d\phi)=0 \tag{9}$$

となる。この $d\omega$ を閉微分形式，単に，閉形式という。従って，完全形式($\omega=d\phi$)は閉形式である。$\vec{G}=\mathrm{grad}\phi$ を仮定すれば，

$$\mathrm{rot\ grad}\phi=\nabla\times(\nabla\phi)=0$$

であるから，(9)式は当然の結果である。しかし，(9)式の逆は，常に成り立つとは限らない。

ここに，$\mathrm{rot}\vec{G}$ と $d\vec{S}$（面積要素ベクトル）は，

$$\mathrm{rot}\vec{G}=(h_y-g_z,\ f_z-h_x,\ g_x-f_y)$$

$$d\vec{S}=(dy \wedge dz,\ dz \wedge dx,\ dx \wedge dy)=(dydz, dzdx, dxdy)$$

である。この2形式 φ の領域 D における積分を，

$$\iint_D \varphi=\iint_D (h_y-g_z)dydz+(f_z-h_x)dzdx+(g_x-f_y)dxdy \tag{10}$$

で定義する。領域 D（曲面 S）とその境界（∂D：閉曲線 C）に対して，

$$\iint_D \mathrm{rot}\vec{G}d\vec{S}=\int_{\partial D}\vec{G}d\vec{r}\quad\left(\iint_D d\omega=\int_{\partial D}\omega\right) \tag{11}$$

となる。これが Stokes の公式であった。

2形式の表式で重要になるのは，

$$f(x,y,z)dy \wedge dz+g(x,y,z)dz \wedge dx+h(x,y,z)dx \wedge dy(=\vec{G}d\vec{S}) \tag{12}$$

の型である。これから，3形式を作ると，

$$d\varphi=d(\vec{G}d\vec{S})=d\vec{G}\wedge d\vec{S}=df \wedge dy \wedge dz+dg \wedge dz \wedge dx+dh \wedge dx \wedge dy$$

$$=(f_xdx+f_ydy+f_zdz)\wedge dy\wedge dz+(g_xdx+g_ydy+g_zdz)\wedge dz\wedge dx(h_xdx+h_ydy+h_zdz)\wedge dx\wedge dy$$

$$=(f_x+g_y+h_z)dx\wedge dy\wedge dz=\mathrm{div}\vec{G}dv,\ (dv=dx\wedge dy\wedge dz)$$

領域 D とその境界（∂D：閉曲面 S）に対して，上式の積分は，

$$\iint_{\partial D} d(\vec{G}d\vec{S})=\iiint_{D}\mathrm{div}\vec{G}dv\quad\left(\iint_{\partial D}\varphi=\iiint_{D}d\varphi\right)$$

で，領域 ∂D の代わりに S，領域 D の代わりに V とすれば，

$$\iint_{S}\mathrm{rot}\vec{G}d\vec{S}=\iiint_{V}\mathrm{div}\vec{G}dv \tag{13}$$

を得る。これが Gauss の定理であった。(7)式の 3 形式は明らかに，

$$d\varphi=d^2\omega=d(d^2\phi)=d^3\phi$$

$$=(h_{xy}-g_{xz})dx+(h_{yy}-g_{yz})dy+(h_{zy}-g_{zz})dz\wedge dy\wedge dz$$

$$+(f_{xz}-h_{xx})dx+(f_{yz}-h_{yx})dy+(f_{zz}-h_{zx})dz\wedge dz\wedge dx$$

$$+(g_{xx}-f_{xy})dx+(g_{yx}-f_{yy})dy+(g_{zx}-f_{zy})dz\wedge dx\wedge dy$$

$$=(f_{yz}-f_{zy}+g_{zx}-g_{xz}+h_{xy}-h_{yx})dx\wedge dy\wedge dz=0$$

である。$d^4\phi$は，常に 0 である。このことは一般的に言えて，n 次元で $(n+1)$ 次元以上の微分式は 0 でしかない。

以上を要約すれば，関数$\phi(x,y,z)$に演算子 d を作用させて，0 形式から 1 形式，1 形式から 2 形式，…，と微分形式が得られる：

$$\begin{array}{ll} d\phi=\mathrm{grad}\phi d\vec{r} & d\vec{r}=(dx,dy,dz)\\ d(\vec{G}d\vec{r})=\mathrm{rot}\vec{G}d\vec{S} & \vec{G}=grad\phi(f,g,h)\\ & d\vec{S}-(dydz,dzdx,dxdy)\\ d(\vec{G}d\vec{S})=\mathrm{div}\vec{G}dv & dv=dxdydz\\ d(dv)=0 & \end{array}$$

Stokes，Gauss の公式は外微分（ω，$d\omega$）によって統一的に記述できる：

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}d\omega$$

D，∂D は領域とそれの境界である。この式を「Stokes の公式」と総称する。

（平成15年11月26日受理）