演習：ベクトル解析での微分演算子

石　　信一*

Exercise : On Differential Operators in Vector Analysis

Shin-ichi ISHI

要　旨

ベクトル解析や微分形式の微分演算子の意味とその使い方を，ヘルムホルツの定理 (Helmholtz's Theorem) を演習題材として学ぶ。

Abstract

The purpose of this article is that we learn meanings of the differential operators in the theories of vector analysis and differential form through the Helmholtz's theorem.

① 微分形式の概要を述べよう。

$$\int_C f(x)dx,\ \int_S f(x,y)dxdy,\ \int_V f(x,y,z)dxdydz$$

積分の中の被積分関数$f(x)dx, f(x,y)dxdy, f(x,y,z)dxdydz$の型を微分形式といい，それぞれを1-形式 ($\Omega^1$)，2-形式 ($\Omega^2$)，3-形式 ($\Omega^3$) という。0-形式 ($\Omega^0$) は，関数$f$に他ならない。３次元空間での微分形式としては，0-形式から3-形式まで考えればよい。関数$f(x,y,z)$の全微分は，

$$df = df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

と書けた。微分形式の言葉では，外微分演算子“d”によって0-形式から1-形式を作る，という。dfをfの外微分，微分法では単にfの微分といった。この1-形式，微分dx, dy, dzの一次結合の係数$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$は，スカラーポテンシャル$f$から作られる勾配ベクトル場に対応する：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \nabla f = grad\ f$$

1-形式($\omega = f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$)から2-形式($d\omega$)を作るには，

$$d\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz\right)dy$$
$$+ \left(\frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial z}dz\right)dz = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

ここに，$dxdx = dydy = dzdz = 0, dxdy = -dydx, dydz = -dzdy, dzdx = -dxdz$。この2-形式での係数$\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$は，ベクトル場$\vec{A} = (f, g, h)$の回転ベクトルに対応する（このとき，空間の向きを定めておく）：

＊　助教授　機械工学科

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z},\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\nabla\times\vec{A}=rot\vec{A}$$

2-形式から3-形式を作るには，

$$d(f(x,y,z)dydz)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)dydz=\frac{\partial f}{\partial x}dxdydz$$

$$d(g(x,y,z)dzdx)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz\right)dzdx=\frac{\partial g}{\partial y}dydzdx=\frac{\partial g}{\partial y}dxdydz$$

$$d(h(x,y,z)dxdy)=\left(\frac{\partial h}{\partial x}dx+\frac{\partial h}{\partial y}dy+\frac{\partial h}{\partial z}dz\right)dxdy=\frac{\partial h}{\partial z}dzdxdy=\frac{\partial h}{\partial z}dxdydz$$

ここに，$dzdxdy=(-1)dxdzdy=(-1)^2dxdydz, dxdxdy=dydxdy=0,\cdots$。3-形式での係数$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}$は，ベクトル場$\vec{A}=(f,g,h)$の発散に対応する：

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\nabla\vec{A}=div\vec{A}$$

尚，上式の0-形式(f)及び1-形式(ω)の外微分を二回続けて作用させると，

［Ｉ］$d(df)=d^2f=0$　　（ベクトル場の用語）　$rot\ grad\ f=0$

［Ⅱ］$d(d\omega)=d^2\omega=0$　　（ベクトル場の用語）　$div\ rot\vec{A}=0$

となる。これらに関連した内容をベクトル解析で述べると次のようになる：

スカラーポテンシャルfとベクトルポテンシャル$\vec{A}$の存在について

［Ｉ］$rot\vec{A}=0\rightarrow\vec{A}=\nabla f=grad\ f$となるスカラーポテンシャル$f$が存在する。ポテンシャル$f$の選び方は定数の不定性がある。$rot\vec{A}=0$のベクトル場を渦無し，非回転場等という。

［Ⅱ］$div\vec{A}=0\rightarrow\vec{A}=\nabla\times\vec{B}=rot\vec{B}$となるベクトルポテンシャル$\vec{B}$が存在する。ポテンシャル$\vec{B}$の選び方は$\nabla\phi$の不定性がある$(rot\ grad\ f=0)$。$div\vec{A}=0$のベクトル場を発散無し，回転場等という。

微分形式ωにおいて，$\omega=d\phi$と書けるωを完全形式，$d\omega=0$と書けるωを閉形式という。$dd\phi=0$のとき，簡単に完全形式は閉形式という。$\Delta\omega=0$を満たすωを調和形式という。

k-形式（$k=0,1,2,3$）から$(3-k)$-形式に変える演算子＊（Hogdeのスター演算子）を次のように定義する：

$$*f=fdxdydz,\quad *(fdx+gdy+hdz)=fdydz+gdzdx+hdxdy,$$

$$*(fdydz+gdzdx+hdxdy)+fdx+gdy+hdz,\quad *fdxdydz=f,\quad **=1^{\dagger}$$

外微分dは微分形式の次数を１回上げる微分演算子であった。微分形式の次数を１回下げる演算子δ^2をdと＊を用いて次のように定義する：

$$\delta\omega=(-1)^k*d*\omega$$

上述の如く，ベクトル場の微分演算子$grad,rot,div$は外微分演算子の一種に他ならない。これらの演算子が作用する微分形式の空間の様子をまとめると[1]，

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0 & \xrightarrow[grad]{d} & \Omega^1 & \xrightarrow[rot]{d} & \Omega^2 & \xrightarrow[div]{d} & \Omega^3\\
\upharpoonleft\downharpoonright & & \upharpoonleft\downharpoonright & & \upharpoonleft\downharpoonright & & \upharpoonleft\downharpoonright\\
\Omega_{\star 0} & \xrightarrow[-div]{\delta} & \Omega_{\star 1} & \xrightarrow[rot]{\delta} & \Omega_{\star 2} & \xrightarrow[-grad]{\delta} & \Omega_{\star 3}
\end{array}$$

---

† n-形式の$**$，δの定義：$**=(-1)^{k(n-k)}$，$\delta=(-1)^k*^{-1}d*=(-1)^{n(k+1)+1}*d*$。$n=3$のとき，$**=1$，$\delta=(-1)^k*d*$としてよい。

[1] ベクトル解析と多様体　小松彦三郎著（岩波講座応用数学［基礎６］p94）

ここに，$\Omega_{\star k}$ は Ω^k の双対空間，⥮ は内積で関係付けられいる(双対写像)。

$$\int grad\, f\cdot\mathbf{A}d\mathbf{V} \;=\; \int f\cdot -div\mathbf{A}dV, \qquad f\in\Omega^0,\ \mathbf{A}\in\Omega_{\star 1} \tag{1}$$

$$\int rot\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}dV \;=\; \int \mathbf{A}\cdot rot\mathbf{B}dV, \qquad \mathbf{A}\in\Omega^1,\ \mathbf{B}\in\Omega_{\star 2} \tag{2}$$

$$\int div\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{f}dV \;=\; \int \mathbf{A}\cdot -grad\mathbf{f}dV, \qquad \mathbf{A}\in\Omega^2,\ \mathbf{f}\in\Omega_{\star 3} \tag{3}$$

② 三次元空間のベクトル場($\vec{A}$)を考える。ベクトル$\vec{A}$は，スカラーポテンシャル関数fとベクトルポテンシャル関数$\vec{B}$を用いて

$$\vec{A}=grad\ f+rot\vec{B} \tag{4}$$

と分解できる。これはヘルムホルツの定理と呼ばれている。以下，この定理を通常のベクトル解析での天下り的な解法を微分形式のそれらに翻訳する。天下り的とは，(1)分解の型が(1)式であることを仮定，(2)ポアソン方程式($\Delta f=g, \Delta\vec{f}=\vec{g}$)に解があることを仮定していることである。ベクトル場と微分形式の対応には，1-形式と2-形式の場合がある。微分形式については，以下の二段組の右側にそれぞれの場合（[Ⅰ]と[Ⅱ]）について示す。まずは，スカラーポテンシャルに対するポアソン方程式の解の存在を仮定する場合について示す。

[ベクトル解析の場合]

(1) 式の両辺に，div を作用させると，

$$div\vec{A}=div\ grad\ f+div\ rot\vec{B}$$
$$=\Delta f$$

となる。この Poisson 方程式の解 f は，Green 関数（基本解）を用いて，

$$f=\int G(r,r')div\vec{A}(r')dr'$$
$$\Delta G(r,r')=\delta(r-r')$$

と表せる。解 f をスカラーポテンシャル(関数)と呼ぶ。このスカラーポテンシャル(関数)を用いて$\vec{A}-grad\ f$を作り，div を作用させると，

$$div(\vec{A}-grad\ f)=0$$

従って，$\vec{A}-grad\ f=rot\vec{B}$となるベクトル・ポテンシャル$\vec{B}$が存在する。$grad\, f$を移項すれば，

$$\vec{A}=grad\ f+rot\vec{B}$$

と求める等式を得る。

[Ⅰ] $\mathbf{A}\in\Omega^1$ （$f\in\Omega^0, \mathbf{B}\in\Omega^2$)

(1)式に対応する微分形式が$\mathbf{A}=df+\delta\mathbf{B}$と書けるとする。両辺に δ を作用させると ($\delta\delta\mathbf{B}=0$),

$$\delta\mathbf{A}=\delta(df+\delta\mathbf{B})=\delta df-\delta\delta\mathbf{B}=-\Delta f\,(*)$$
$$(\delta df=-div\ grad\ f=-\Delta f)$$

が成立つ。この0-形式(関数)fを用いて $\mathbf{A}-df$ を作り，δ を作用させると，上式 (*) によって，

$$\delta(\mathbf{A}-df)=\delta\mathbf{A}-\delta df=\delta\mathbf{A}+\Delta f=0$$

即ち，$\mathbf{A}-df=\delta\mathbf{B}$となる2-形式 $\mathbf{B}$ が存在する。dfを移項して，

$$\mathbf{A}=df+\delta\mathbf{B}$$

[Ⅱ] $\mathbf{A}\in\Omega^2$ ($\mathbf{B}\in\Omega^1, \mathbf{f}\in\Omega^3$)

(1)に対応する微分形式$\mathbf{A}=\delta\mathbf{f}+d\mathbf{B}$として，$d$ を両辺に作用させると ($dd\mathbf{B}=0$),

$$d\mathbf{A}=d(\delta\mathbf{f}+d\mathbf{B})=d\delta\mathbf{f}+dd\mathbf{B}=-\Delta\mathbf{f}$$

が成立つ。この3-形式 $\mathbf{f}$ を用いて$\mathbf{A}-\delta\mathbf{f}$を作り，$d$ を作用させると，

$$d(\mathbf{A}-\delta\mathbf{f})=d\mathbf{A}-d\delta\mathbf{f}=d\mathbf{A}+\Delta\mathbf{f}=0$$

従って，$\mathbf{A}-\delta\mathbf{f}=d\mathbf{B}$となる1-形式 $\mathbf{B}$ が存在する。δfを移項して，

$$\mathbf{A}=\delta\mathbf{f}+d\mathbf{B}$$

上記では，スカラーポテンシャルに対するポアソン方程式の解の存在を仮定したが，ベクトルポテンシャ

ルに対するポアソン方程式の解の存在を仮定しても同様にできる。

[ベクトル解析の場合]

(1)式の両辺に rot を作用させると，

$$rot\vec{A} = rot(-grad\ f) + rot(rot\vec{B})$$

$$= grad(div\vec{B}) - \Delta\vec{B}$$

となる。上式がPoisson方程式の型 $rot\vec{A} = -\Delta\vec{B}$ になるには，$div\vec{B}=0$ の条件が必要である。解がベクトル関数のPoisson方程式を満なすとは，

$$\Delta\vec{B} = (\Delta B_x, \Delta B_y, \Delta B_z), \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

のことである。このPoisson方程式の解 $\vec{B}$ は，Green関数（基本解）を用いて，

$$\vec{B} = \int \vec{G}(r, r')rot\vec{A}(r')dr'$$

$$\Delta\vec{G}(r, r') = \delta(r - r')$$

と書ける。このベクトルポテンシャル(関数) $\vec{B}$ を用いて $\vec{A} - rot\vec{B}$ を作り，rot を作用させると，

$$rot(\vec{A} - rot\vec{B}) = 0$$

従って，$\vec{A} - rot\vec{B} = grad\ f$ となるスカラーポテンシャル f が存在する。$rot\vec{B}$ を移項して，

$$\vec{A} = grad\ f + rot\vec{B}$$

[I] $\mathbf{A} \in \Omega^1$ （$f \in \Omega^0, \mathbf{B} \in \Omega^2$）

$\mathbf{A} = df + \delta\mathbf{B}$ として，d を両辺に作用させると ($ddf=0$),

$$d\mathbf{A} = d(df + \delta\mathbf{B}) = d\delta\mathbf{B}$$

$$= -(\delta d + \Delta)\mathbf{B} = -\Delta\mathbf{B}$$

$$(d\delta + \delta d = -\Delta,\ d\mathbf{B} = 0)$$

この2-形式 $\mathbf{B}$ を用いて $\mathbf{A} - \delta\mathbf{B}$ を作り，d を作用させると，$d(\mathbf{A} - \delta\mathbf{B}) = 0$。従って，$\mathbf{A} - \delta\mathbf{B} = df$ となる0-形式の f が存在する。$\delta\mathbf{B}$ を移項して，

$$\mathbf{A} = df + \delta\mathbf{B}$$

[II] $\mathbf{A} \in \Omega^2$ （$\mathbf{B} \in \Omega^1, \mathbf{f} \in \Omega^3$）

$\mathbf{A} = \delta\mathbf{f} + d\mathbf{B}$ として，δ を作用させると，

$$\delta\mathbf{A} = \delta(\delta\mathbf{f} + d\mathbf{B})$$

$$= \delta d\mathbf{B} = -(d\delta - \Delta)\mathbf{B} = \Delta\mathbf{B}$$

この1-形式 $\mathbf{B}$ を用いて $\mathbf{A} - d\mathbf{B}$ を作り，δ を作用させると，

$$\delta(\mathbf{A} - d\mathbf{B}) = 0$$

従って，$\mathbf{A} - d\mathbf{B} = \delta\mathbf{f}$ となる3-形式の $\mathbf{f}$ が存在する。$\mathbf{B}$ を移項して，

$$\mathbf{A} = \delta\mathbf{f} + d\mathbf{B}$$

上記の事柄がベクトル場の縦及び横成分への分解であることがわかると，次のような形式的な議論ができる[2]。

任意のベクトル $\vec{X}$ は，単位ベクトル $\vec{e}$ によってその平行及び垂直成分

$$\vec{X} = (\vec{e}\ \vec{X})\vec{e} + \vec{e} \times (\vec{X} \times \vec{e})$$

に分解できる。ここに，$\vec{e} \to \nabla$ と置き換えると，

$$右辺 = (\nabla\ \vec{X})\nabla + \nabla \times (\vec{X} \times \nabla) = (\nabla\ \vec{X})\nabla + \nabla\ \nabla\ \vec{X} - (\nabla\ \vec{X})\nabla = \nabla\ \nabla\ \vec{X} = \Delta\vec{X}$$

即ち，$\Delta\vec{X} = grad\ div\vec{X} - rot\ rot\vec{X} = grad\ \phi + rot\vec{B}$ と書ける。ここで，$\phi = div\vec{X}, \vec{B} = -rot\vec{X}$ 及び $\Delta\vec{X} = \vec{A}$ とおけば，$\vec{A} = grad\phi + rot\vec{B}$ である。

(平成15年11月26日受理)

[2] 現代物理学演習講座　力学　伏見康治・中井真蔵著（共立出版，p11）