ガンマ関数の工学問題への応用

森　　重　雄*

The Application of Gamma Function for Engineering Solution

Shigeo MORI

要　旨

工学でよく見られる積分にガンマ関数を応用すれば，学生が解を簡単に求めることができるようになる。

Abstract

Gamma Function makes easy solutions on typical integral problems of engineering. Studends will solve those problems more easily and simply by using Gamma Function.

1. はじめに

システム工学や制御工学の問題では,以下の積分がよく見られる。

$$\int_0^\infty t^n e^{-st} dt \qquad \cdot\cdot\cdot\cdot (1)$$

この積分は，部分積分法を適用すれば解けるが，tの次数が大きくなると展開が非常に面倒になる。しかし，ガンマ関数を使用すれば容易に解くことができる。学生にガンマ関数を修得させることにより，この積分の解を求めるときの時間短縮が可能になる。さらに，ガンマ関数を適用しなければ解けないような問題にも対応できるようになる。

2. ガンマ関数

ガンマ関数とは次の積分をいう。この積分は第二種のオイラー積分ともいう。[1)]

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \qquad n > 0 \qquad \cdot\cdot\cdot (2)$$

ガンマ関数は次の性質をもつ。

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \qquad n > 0 \qquad \cdot\cdot\cdot (3)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad n:\text{正の整数} \qquad \cdot\cdot\cdot (4)$$

$$\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \frac{(2m)!}{(2^m)^2 m!}\sqrt{\pi} \qquad m = 0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

$$\Gamma(-m-\frac{1}{2}) = (-1)^{m+1}\frac{2^{2m+1} m!}{(2m+1)!}\sqrt{\pi} \qquad m = 0,1,2,\ldots \qquad (6)$$

ガンマ関数のグラフは図 2.1 のようになる。

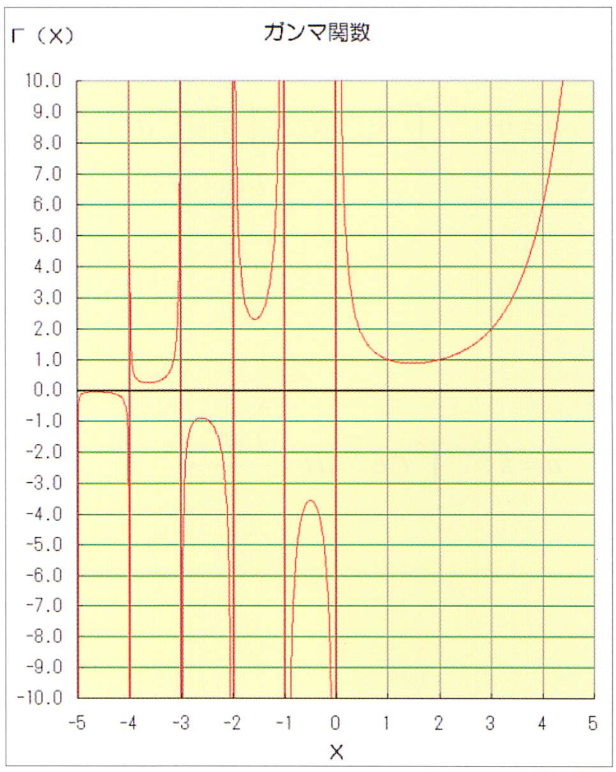

図 2.1 ガンマ関数

3. ガンマ関数の応用形

ガンマ関数を以下とする。この場合は式(2)より $n > -1$ であればよい。

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \qquad n > -1 \quad \cdots (7)$$

ここで，$x = st$ とすると，$dx = sdt$ であり，$x = 0 \to \infty$ の変化で，$t = 0 \to \infty$ と変化するから

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty (st)^n e^{-st} s\,dt$$
$$= s^{n+1} \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt$$

これより

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \qquad n > -1 \quad \cdots (8)$$

となる。これを応用して式(1)の積分を求めることができる。

$$n = -1/2: \quad \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(-1/2+1)}{s^{-1/2+1}}$$
$$= \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

$$n = 1/2: \quad \int_0^\infty t^{1/2} e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(1/2+1)}{s^{1/2+1}}$$
$$= \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{s^{3/2}} \cdot \frac{(2\cdot 1)!}{(2^1)^2 \cdot 1!}\sqrt{\pi}$$
$$= \frac{1}{s^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4. ガンマ関数の応用

4.1 式(1)への応用

システム工学や制御工学の問題では，式(1)の n は一般に正の整数であるので，式(8)のガンマ関数表現を応用して，解を容易に得られる。以下はラプラス変換で見られる積分の解である。[3)]

$$n = 0: \quad \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \int_0^\infty t^0 e^{-st}\,dt$$
$$= \frac{\Gamma(0+1)}{s^{0+1}}$$
$$= \frac{(0)!}{s}$$
$$= \frac{1}{s}$$

$$n = k: \quad \int_0^\infty t^k e^{-st}\,dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$$
$$= \frac{k!}{s^{k+1}}$$

4.2 nが半整数時の応用

式(1)の n が半整数の場合も，式(8)のガンマ関数表現を応用して，解を容易に得られる。

4.3 待ち行列理論への応用

ポアソン到着における到着時間分布の確率密度関数から，到着時間の平均 E_t と分散 V_t を求める。

確率密度関数 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$E_t = \int_0^\infty t\, f(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty t\, \lambda e^{-\lambda t}\,dt$$
$$= \frac{\lambda \Gamma(2)}{\lambda^2}$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$V_t = \int_0^\infty (t - E_t)^2 f(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty t^2 f(t) dt - E_t^{\,2}$$
$$= \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= \frac{\lambda \Gamma(3)}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$
$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

4.4　ワイブル分布への応用

ワイブル分布における平均寿命 μ を求める。この問題の場合，ガンマ関数を使用しないで求めることは難しい。[2)]

故障時間の確率密度関数 $f(t)$ は

$$f(t) = m\frac{t^{m-1}}{\eta^m}e^{-\frac{t^m}{\eta^m}}$$

$$t \geq 0, \eta > 0, m > 0$$

である。
平均寿命 μ は次の式で求まる。

$$\mu = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty t\, m\frac{t^{m-1}}{\eta^m}e^{-\frac{t^m}{\eta^m}}\, dt \qquad \cdots (9)$$

式(9)は以下のように変形できる。

$x = \frac{t^m}{\eta^m}$ とおくと

$$\frac{mt^{m-1}}{\eta^m}dt = dx, \quad t = \eta x^{1/m}$$

$t = 0 \to \infty$ の変化で，$x = 0 \to \infty$ と変化するから

$$\mu = \int_0^\infty t\, m\frac{t^{m-1}}{\eta^m}e^{-\frac{t^m}{\eta^m}}\, dt$$

$$= \eta\int_0^\infty x^{\frac{1}{m}}\, e^{-x}\, dx \qquad \cdots (10)$$

$(1/m) > -1$ であるから式(10)に式(8)を適用できる。
その結果は

$$\mu = \eta \cdot \frac{\Gamma(1+1/m)}{1^{1+1/m}}$$

$$= \eta\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

となる。
また，故障時間の分散 V_t は次のように求められる。

$$V_t = \int_0^\infty (t-\mu)^2 f(t)\, dt$$

$$= \int_0^\infty t^2\, f(t)dt - \mu^2$$

$$= \int_0^\infty t^2 m\frac{t^{m-1}}{\eta^m}e^{-\frac{t^m}{\eta^m}}\, dt - \mu^2$$

$$= \eta^2\int_0^\infty x^{\frac{2}{m}}\, e^{-x}\, dx - \mu^2$$

$$= \eta^2 \cdot \frac{\Gamma(1+2/m)}{1^{1+2/m}} - \mu^2$$

$$= \eta^2\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right) - \eta^2\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)^2$$

$$= \eta^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)^2\right\}$$

5.　おわりに

工学問題によく見られる積分にガンマ関数を応用すると，解が容易に得られることを示した。

情報工学科 5 年生にガンマ関数を使用した解法を教授したところ，定期試験でほとんどの学生が使うようになり，学生が抵抗なく受け入れることを確認した。

参 考 文 献

1) 道脇義正 他 著： 応用数学，
コロナ社，1965
2) 室津義定 他 著：システム工学，
技術評論社，2003
3) 明石 一 他 著：詳解制御工学演習，
共立出版社，1981

(平成16年12月15日受理)