行列と連立線形微分方程式

藤島勝弘* ・菅原道弘**

Matrices and Linear Systems of Differential Equations

FUJISHIMA Katsuhiro, SUGAWARA Michihiro

要　旨

行列の固有値・固有ベクトルの応用範囲は広い．連立微分方程式もいろいろの場合に用いられる．この度, 固有値・固有ベクトルを利用して, 連立微分方程式を解くことを試みた．両者の関係に学生は驚いた.

Abstract

Eigenvalues and eigenvectors of matrix are widely applied, and systems of differential equations are used in various cases. And therefore we tried to solve the linear systems of differential equations with eigenvalue and the eigenvector. Students were surprised at the unexpected relation between the two.

1　はじめに

平成 17 年度現在, 本校 (苫小牧工業高等専門学校) の数学のカリキュラムは過渡期にある．線形変換や固有値・固有ベクトルは 3 年生の前期から後期の $\frac{1}{4}$ 期くらいまでで終えている．微分方程式については 3 年生の後期後半, 4 年生の前期 (このことは今年度で終了) で扱っている．時期的には, 固有値・固有ベクトルの学習が終わってから連立微分方程式を扱うので, 応用の一例としてしては都合が良い．ただ本校では固有値・固有ベクトルの応用として, 行列の対角化・2 次形式の標準化・行列のべき乗までの扱いである．従って, 今回は指数行列を利用していない.

*　助教授　理系総合学科

**　教　授　理系総合学科

2　具体例

定数係数線形連立微分方程式の解法を示す．演算子を利用する解法は便利で使いやすい．我々のねらいは, 行列と連立微分方程式の間に密接な関係があることを学生に知ってもらうことである.

問題 1　次の連立微分方程式を解け.

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 18x_1 - 12x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 20x_1 - 13x_2 \end{cases}$$

[解 1] 行列を用いると次のようになる.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ 20 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ 20 & -13 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(1)$$

また, $\det(A - \lambda E) = 0$ (E は単位行列, 以下同様) よ

り，$\begin{vmatrix} 18-\lambda & -12 \\ 20 & -13-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\therefore \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\therefore \lambda = 2, 3$ （固有値）

固有ベクトルを求めると，

i)　$\lambda = 2$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

ii)　$\lambda = 3$ のとき，$\beta\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

ただし，α，β は 0 でない任意の実数とする．(以下同様)

ここで，$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(対角化)

また，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$　　　　……(2)

とおくと，行列 P は定数行列なので

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3)$$

(1)，(2)，(3) より，$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = 3y_2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 = C_1e^{2t} \\ y_2 = C_2e^{3t} \end{cases}$$

（C_1，C_2 は任意定数）(以下同様)

よって，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{2t} \\ C_2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3C_1e^{2t} + 4C_2e^{3t} \\ 4C_1e^{2t} + 5C_2e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 3C_1e^{2t} + 4C_2e^{3t} \\ x_2 = 4C_1e^{2t} + 5C_2e^{3t} \end{cases}$$

［解 1］を簡単にまとめると次のようになる．

［解 2］与えられた連立微分方程式より，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ 20 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ 20 & -13 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，

$$\begin{vmatrix} 18-\lambda & -12 \\ 20 & -13-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\therefore \lambda = 2, 3$（固有値）

固有ベクトルを求めると，

$\lambda = 2$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，$\lambda = 3$ のとき，$\beta\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2e^{3t}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = 3C_1e^{2t} + 4C_2e^{3t} \\ x_2 = 4C_1e^{2t} + 5C_2e^{3t} \end{cases}$$

次に演算子を利用して解いてみる．

［解 3］$\dfrac{d}{dt}$ を D とおくと，与えられた連立微分方程式は次のようになる．

$$\begin{cases} (D-18)x_1 + 12x_2 = 0 & \cdots\cdots(1) \\ 20x_1 - (D+13)x_2 = 0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2) より，$x_1 = \dfrac{1}{20}(D+13)x_2$　　　　……(3)

これと (1) より，$(D^2 - 5D + 6)x_2 = 0$

特性方程式 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ より，$\lambda = 2, 3$

$\therefore x_2 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$

これと (3) より，

$$x_1 = \frac{3}{4}C_1e^{2t} + \frac{4}{5}C_2e^{3t}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{4}C_1e^{2t} + \dfrac{4}{5}C_2e^{3t} \\ x_2 = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \end{cases}$$

問題 2　次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 4x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + 6x_2 \end{cases}$$

［解 1］与えられた連立微分方程式より，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ とおくと，$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

また，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\therefore (\lambda - 4)^2 = 0$

$\therefore \lambda = 4$ (2 重解)（固有値）

固有ベクトルを求めると，

$\lambda = 4$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

次に，$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

すなわち，$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす u_1，u_2 の組を 1 つ求めると，

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

従って，$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ と三角化される．

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とおくと，問題 1 のときと同様に，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 & \cdots\cdots(1) \\ y_2' = 4y_2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2) より，$y_2 = C_2e^{4t}$

これと (1) より，$y_1' - 4y_1 = C_2e^{4t}$

これを解いて，$y_1 = C_1e^{4t} + C_2te^{4t}$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{4t} + C_2te^{4t} \\ C_2e^{4t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2C_1 - C_2)e^{4t} + 2C_2te^{4t} \\ C_1e^{4t} + C_2te^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = (2C_1 - C_2)e^{4t} + 2C_2te^{4t} \\ x_2 = C_1e^{4t} + C_2te^{4t} \end{cases}$$

［解 1］を簡単にまとめると次のようになる．

［解 2］

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，$\lambda = 4$（2 重解）（固有値）

固有ベクトルを求めると，$\lambda = 4$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

このとき，$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす u_1，u_2 の 1 つの組を求めると，$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって，$C_1e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$C_2e^{4t}\left\{t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ は解となる．

従って求める解は，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= C_1e^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{4t}\left\{t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \begin{pmatrix} (2C_1 - C_2)e^{4t} + 2C_2te^{4t} \\ C_1e^{4t} + C_2te^{4t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = (2C_1 - C_2)e^{4t} + 2C_2te^{4t} \\ x_2 = (C_1 + C_2t)e^{4t} \end{cases}$$

［解 3］$\dfrac{d}{dt}$ を D とおくと，与えられた連立微分方程式より，

$$\begin{cases} (D-2)x_1 = 4x_2 & \cdots\cdots(1) \\ (D-6)x_2 = -x_1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)，(2) より，x_1 を消去すると，$(D^2 - 8D + 16)x_2 = 0$

特性方程式 $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ より，$\lambda = 4$（2 重解）

$$\therefore x_2 = (C_1 + C_2t)e^{4t}$$

これと (2) より，$x_1 = (2C_1 - C_2)e^{4t} + 2C_2te^{4t}$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = (2C_1 - C_2)e^{4t} + 2C_2te^{4t} \\ x_2 = (C_1 + C_2t)e^{4t} \end{cases}$$

問題 3　次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

［解 1］行列を用いると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

$$\therefore \lambda = 3 \pm i\ (\text{固有値})$$

固有ベクトルを求めると，

i)　$\lambda = 3 + i$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$

ii)　$\lambda = 3 - i$ のとき，$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix}$

従って，

$$\begin{aligned} &e^{(3+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \\ &= e^{3t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix} + ie^{3t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &e^{(3-i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \\ &= e^{3t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix} - ie^{3t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ゆえに求める解（実数値関数のもの）は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t + \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ e^{3t}\{(-C_1 - C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t\} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = e^{3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x_2 = e^{3t}\{(-C_1 - C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t\} \end{cases}$$

［解 2］ $\dfrac{d}{dt}$ を D とおくと，

$$\begin{cases} (D-2)x_1 = -x_2 & \cdots\cdots(1) \\ (D-4)x_2 = 2x_1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1), (2) より，x_2 を消去すると，$(D^2 - 6D + 10)x_1 = 0$

特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ より，$\lambda = 3 \pm i$

$$\therefore x_1 = C_1 e^{3t} \cos t + C_2 e^{3t} \sin t$$

これと (1) より，

$$\therefore \begin{cases} x_1 = e^{3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ x_2 = e^{3t}\{-(C_1 + C_2)\cos t + (C_1 - C_2)\sin t\} \end{cases}$$

続いて非斉次線形連立微分方程式を扱う．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + B \qquad \cdots\cdots(1)$$

ただし，x_1，x_2 は t の関数で，A は 2×2 行列，B は 2×1 行列とする．

ここで，$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ の基本解行列を $X = X(t)$ とすると，(1) の一般解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + X \int X^{-1} B dt$$

であることを用いる．

問題 4　次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 + 2e^t \\ x_2' = 4x_1 - 3x_2 + 4e^t \end{cases}$$

［解 1］ 行列を用いると，次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \lambda = \pm 1 \ (\text{固有値})$$

固有ベクトルを求めると，

i)　$\lambda = 1$ のとき，$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii)　$\lambda = -1$ のとき，$\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

よって，

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$

従って，$X = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$ とおくと，

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + X \int X^{-1} \begin{pmatrix} 2e^t \\ 4e^t \end{pmatrix} dt$$

$$= X \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + X \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (C_1 + 1)e^t + C_2 e^{-t} \\ (C_1 + 2)e^t + 2C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = (C_1 + 1)e^t + C_2 e^{-t} \\ x_2 = (C_1 + 2)e^t + 2C_2 e^{-t} \end{cases}$$

［解 2］ $\dfrac{d}{dt}$ を D とおくと，

$$\begin{cases} (D-3)x_1 + 2x_2 = 2e^t & \cdots\cdots(1) \\ -4x_1 + (D+3)x_2 = 4e^t & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(1) \times (D+3) - (2) \times 2$:

$$\begin{array}{rrr} & (D^2-9)x_1 & +2(D+3)x_2 = 8e^t \\ -) & -8x_1 & +2(D+3)x_2 = 8e^t \\ \hline & (D^2-1)x_1 & = 0 \end{array}$$

特性方程式 $\lambda^2 - 1 = 0$ より，$\lambda = \pm 1$

よって，$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$

これと (1) より，$x_2 = C_1 e^t + 2C_2 e^{-t} + e^t$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ x_2 = C_1 e^t + 2C_2 e^{-t} + e^t \end{cases}$$

問題 5　次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -2x_1 + 2x_2 + 6t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

［解 1］ 行列を用いると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\-1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6t\\0\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}-2&2\\-1&-5\end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A-\lambda E)=0$ より，

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda&2\\-1&-5-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \lambda^2+7\lambda+12=0$

$\therefore \lambda=-3,\ -4$ (固有値)

固有ベクトルを求めると，

i) $\lambda=-3$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

ii) $\lambda=-4$ のとき，$\beta\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

よって，

$$e^{-3t}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2e^{-3t}\\-e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$e^{-4t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-4t}\\e^{-4t}\end{pmatrix}$$

従って，$X=\begin{pmatrix}2e^{-3t}&-e^{-4t}\\-e^{-3t}&e^{-4t}\end{pmatrix}$ とおくと，

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}e^{3t}&e^{3t}\\e^{4t}&2e^{4t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}&=X\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}+X\int X^{-1}\begin{pmatrix}6t\\0\end{pmatrix}dt\\&=X\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}+X\begin{pmatrix}2te^{3t}-\frac{2}{3}e^{3t}\\\frac{3}{2}te^{4t}-\frac{3}{8}e^{4t}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2C_1e^{-3t}-C_2e^{-4t}+\frac{5}{2}t-\frac{23}{24}\\-C_1e^{-3t}+C_2e^{-4t}-\frac{1}{2}t+\frac{7}{24}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases}x_1=2C_1e^{-3t}-C_2e^{-4t}+\frac{5}{2}t-\frac{23}{24}\\x_2=-C_1e^{-3t}+C_2e^{-4t}-\frac{1}{2}t+\frac{7}{24}\end{cases}$$

［解 2］ $\frac{d}{dt}$ を D とおくと，

$$\begin{cases}(D+2)x_1-2x_2=6t & \cdots\cdots(1)\\x_1+(D+5)x_2=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1), (2) より，x_1 を消去すると，$(D^2+7D+12)x_2=-6t$

特性方程式 $\lambda^2+7\lambda+12=0$ より，$\lambda=-3,\ -4$

また，$x_2=\frac{1}{D^2+7D+12}[-6t]=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{24}$

$$\therefore x_2=C_1e^{-3t}+C_2e^{-4t}-\frac{1}{2}t+\frac{7}{24}$$

これと (2) より，$x_1=-2C_1e^{-3t}-C_2e^{-4t}+\frac{5}{2}t-\frac{23}{24}$

$$\therefore \begin{cases}x_1=-2C_1e^{-3t}-C_2e^{-4t}+\frac{5}{2}t-\frac{23}{24}\\x_2=C_1e^{-3t}+C_2e^{-4t}-\frac{1}{2}t+\frac{7}{24}\end{cases}$$

問題 6　次の連立微分方程式を解け．

$$\begin{cases}2x_1'+x_2'=4x_1+x_2+e^t & \cdots\cdots(1)\\x_1'=-3x_1-x_2 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

［解 1］

(1)，(2) より，$x_2'=10x_1+3x_2+e^t$

$$\therefore \begin{cases}x_1'=-3x_1-x_2\\x_2'=10x_1+3x_2+e^t\end{cases}$$

行列を用いると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\10&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\e^t\end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix}-3&-1\\10&3\end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A-\lambda E)=0$ より，

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda&-1\\10&3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\therefore \lambda^2+1=0$

$\therefore \lambda=\pm i$ (固有値)

固有ベクトルを求めると，

i) $\lambda=i$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix}1\\-3-i\end{pmatrix}$

ii) $\lambda=-i$ のとき，$\beta\begin{pmatrix}1\\-3+i\end{pmatrix}$

ここで，

$$\begin{aligned}e^{it}\begin{pmatrix}1\\-3-i\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos t\\-3\cos t+\sin t\end{pmatrix}\\&\quad+i\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t-3\sin t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{-it}\begin{pmatrix}1\\-3+i\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos t\\-3\cos t+\sin t\end{pmatrix}\\&\quad-i\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t-3\sin t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

従って，$X=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\-3\cos t+\sin t&-\cos t-3\sin t\end{pmatrix}$ とおくと，

$$X^{-1}=\begin{pmatrix}\cos t+3\sin t&\sin t\\-3\cos t+\sin t&-\cos t\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + X\int X^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} dt$$
$$= X\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + X\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^t(\sin t - \cos t) \\ \frac{1}{2}e^t(-\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t \\ (-3C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + 3C_2)\sin t + 2e^t \end{pmatrix}$$
$$\therefore \begin{cases} x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t \\ x_2 = (-3C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + 3C_2)\sin t + 2e^t \end{cases}$$

［解2］ $\frac{d}{dt}$ を D とおくと，
$$\begin{cases} (2D-4)x_1 + (D-1)x_2 = e^t & \cdots(1)' \\ (D+3)x_1 = -x_2 & \cdots(2)' \end{cases}$$
$(1)'$，$(2)'$ より，x_2 を消去すると，$(D^2+1)x_1 = -e^t$
特性方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ より，$\lambda = \pm i$
また，$x_1 = -\frac{1}{D^2+1}[e^t] = -\frac{1}{2}e^t$
$$\therefore x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t$$
これと $(2)'$ より，
$$x_2 = (-3C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + 3C_2)\sin t + 2e^t$$
$$\therefore \begin{cases} x_1 = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t \\ x_2 = (-3C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + 3C_2)\sin t + 2e^t \end{cases}$$

次に2階定数係数線形微分方程式を扱うことにする．これも置き換えにより，連立微分方程式に変形できる．

問題7　次の微分方程式を解け．
$$y'' + y' - 6y = 0$$
［解］
$x_1 = y$，$x_2 = y'$ とおくと，
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 6x_1 - x_2 \end{cases}$$
$$\therefore \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\therefore \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$\therefore \lambda = 2,\ -3 \text{（固有値）}$$
固有ベクトルを求めると，

i)　$\lambda = 2$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ii)　$\lambda = -3$ のとき，$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} \\ 2C_1e^{2t} - 3C_2e^{-3t} \end{pmatrix}$$
$y = x_1$ なので，$\underline{y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t}}$

さらに3階定数係数線形微分方程式を扱う．

問題8　次の微分方程式を解け．
$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$$
［解］
$x_1 = y$，$x_2 = y'$，$x_3 = y''$ とおくと，
$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 \end{cases}$$
$$\therefore \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\det(A - \lambda E) = 0$ より，
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\therefore (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+3) = 0$$
$$\therefore \lambda = -1, 2, -3 \text{（固有値）}$$
固有ベクトルを求めると，

i)　$\lambda = -1$ のとき，$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ii)　$\lambda = 2$ のとき，$\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

iii)　$\lambda = -3$ のとき，$\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t} \\ -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t} - 3C_3e^{-3t} \\ C_1e^{-t} + 4C_2e^{2t} + 9C_3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$y = x_1$ なので，

$$\underline{y = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t}}$$

問題 7，問題 8 については，直ちに特性方程式を解くと，解は簡単に得られるが，連立微分方程式に変形できることを示した．

3 授業での感想

線形代数の応用として，以上の方法で連立微分方程式を解くことが出来ることを第 4 学年の解析の授業で示した．そのときの学生の主な感想は次の通りである．

- 従来行ったことの復習を兼ねながら解くことができるので良いと思う．
- 固有値の新たな一面を見た．
- 解法を覚えるのは大変だけど解くのにかかる時間が短くなって驚きました．
- 固有値が A^n とかを解く以外にこんな形で利用できるのは正直感動した．
- 難しいのは解けません．
- 特に何も感じません．
- 意外と簡単に出来たが，かと言ってこれがテストに含まれると色々と紛らわしくなる気がします．

4 もう 1 つの視点から発展

連立微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

は，行列を用いると，

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と表される．

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とおくと，

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x} \qquad \cdots\cdots(1)$$

この微分方程式の解を，

$$\vec{x} = e^{\alpha t}\vec{u}$$

ただし，$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$，$u_1, u_2$ は定数

とおくと，$\frac{d}{dt}\vec{x} = \alpha e^{\alpha t}\vec{u}$ であるから，これを (1) に代入して，

$$\alpha e^{\alpha t}\vec{u} = Ae^{\alpha t}\vec{u}$$
$$\therefore A\vec{u} = \alpha\vec{u}$$

これから，α は行列 A の固有値で，$\vec{u}$ はその固有値に対する固有ベクトルとなる．以後，定数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} は実数とする．

1) 行列 A の固有方程式が異なる 2 つの実数解 λ_1, λ_2 をもつとき，

固有値 λ_1 のときの固有ベクトルを $\vec{p}_1$，λ_2 のときの固有ベクトルを $\vec{p}_2$ とする．連立微分方程式 (1) の解は，

$$\vec{x} = C_1e^{\lambda_1 t}\vec{p}_1 + C_2e^{\lambda_2 t}\vec{p}_2$$
$$= (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2)\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表される．

2) 行列 A の固有方程式が 2 重解 λ をもつとき，

固有値 λ，固有ベクトルを $\vec{p}$ とする．さらに，$(A - \lambda E)\vec{q} = \vec{p}$（$E$ は単位行列）を満たす $\vec{q}$ を 1 つ定めると，$\vec{x} = e^{\lambda t}(\vec{p}t + \vec{q})$ も (1) の解となる．連立微分方程式 (1) の解は，

$$\vec{x} = C_1e^{\lambda t}\vec{p}_1 + C_2e^{\lambda t}(\vec{p}t + \vec{q})$$
$$= (\vec{p} \quad \vec{p}t + \vec{q})\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表される．

3) 行列 A の固有方程式が異なる 2 つの虚数解 $\alpha \pm i\beta$ をもつとき，

固有値 $\alpha + i\beta$ のときの固有ベクトルを $\vec{p} + i\vec{q}$ とすると，固有値 $\alpha - i\beta$ のときの固有ベクトルは $\vec{p} - i\vec{q}$ となる．連立微分方程式 (1) の解は，

$$\vec{x} = e^{\alpha t}\left\{(C_1\vec{p} + C_2\vec{q})\cos\beta t + (C_2\vec{p} - C_1\vec{q})\sin\beta t\right\}$$
$$= (\vec{p} \quad \vec{q})\begin{pmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\sin\beta t \\ -e^{\alpha t}\sin\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表される．

5 おわりに

行列の固有値・固有ベクトルを求める計算は 2×2 行列の場合は簡単であるが，3×3 行列になると手間がか

かる．定数係数線形微分方程式は演算子を利用する方法なら学生も良く理解する．しかし，連立微分方程式になると，確かな計算力も必要となり，容易ではない．

連立微分方程式に行列を利用するのであるが，やはりなかなか大変である．特に非斉次の場合は，クラス全員にとはいかない．しかしながら，これらの例は，かみ砕いて用いれば，知識欲旺盛な学生用教材としては利用価値は高い．固有値・固有ベクトルが微分方程式の解法においても活かされることは，個々の知識がバラバラでないことを悟ると良い例となる．

参考文献

1) 小寺平治：テキスト線形代数，共立出版，2002
2) 黒木哲徳，小野田信治：TEXT 線形代数，共立出版，2003
3) 黒田正：微分方程式の解法，朝倉書店，1972
4) 加藤義史，三宅正武：微分方程式演習，サイエンス社，1988
5) 矢野健太郎，石原繁：解析学概論，裳華房，2003
6) 高遠節夫他：新訂微分積分　，大日本図書，2004
7) Erwin Kreyszig：ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS 8TH EDITION, JOHN WILEY & SONS,INC.，1999

(平成17年12月15日受理)