

インボリュート平歯車の最小歯数について

小 谷 幸 雄*

A Research on the Minimum Number of Involute Spur Gear Teeth.

Sachio ODANI

要 旨

歯数比 6 の標準平歯車と噛合う小歯車の歯数につき、実用上の最小限界を検討した、その結果をここに報告する。

Synopsis

I investigated the possible minimum limit number of the pinion teeth, that engage, in the practical use with the standard spur gear at the revolution ratio of 1 : 6. Here is my report.

I. 緒 言

インボリュート歯形の歯車では、歯数が少くなるにつれ、歯元の曲線部分が基礎円より内側に入り創成歯切りの際、歯の切り下げを起こすので歯元が極めて細くなり、折れ易く弱くなる。又非常に歯形曲線は短くなって噛合い長さが減り、相手歯車の長い曲線部と擦れ合うから減りが早い。

基準ラック型工具で切り下げを起さず歯切り出来る標準並歯車の最小歯数（切り下げの限界歯数）は第 1 表のように工具圧力角の増加に従い逆に小さくなっていく事は明らかである。

第 1 表 インボリュート歯車の最小歯数

工具圧力角 α_e	標準並歯	
	14.5°	20°
最小歯数理論値	32	17
〃 〃 実用限度	21	14

従って工具圧力角の大きなものを利用して、より小さな限界歯数を見出して行くのも一つの方法と考えるが、現在の我国で規格化されている唯一の工具、すなわち工具圧力角 20° のものの利用に焦点を絞り、考えてみることにした。

圧力角 20° のインボリュート標準並歯車で、切り下げが実用強度上多少許容されたとしても、前記の如く最小歯数は 14 枚であり、速比 1 : 6 の歯車装置で

は、噛合い相手歯数は 84 枚を必要とするので変速装置はかなり大きなものとならざるを得ない。

歯数を極力少くした小歯車が得られれば変速装置も小型となり有利となるので、インボリュート歯形に転位法を利用しての小歯車歯数の実用限界を究めるべく、以下研究してみたのでこれを報告する。

II. 転 位 の 利 用

創成される歯車の歯数が小となるに従い、歯元が切り下げられ、歯の強度が弱まり、噛合率も減少するので、これを補うため切り下げ防止限界まで(+)転位して創成歯切りを行なえば良いことは言うまでもない。

然し標準歯たけの小歯車を得ようとすれば、歯数の減小につれ歯先の厚みが次第に薄くなり、工具圧力角 20° のものでは小歯車歯数 8 枚の時に歯先厚みがなくなり、尖ってしまう結果となる。

これより尚歯数の少ないものを創成すれば、歯先は尖ったままで、歯たけは標準歯たけのものよりかなり小さくなり、噛合率も減小の一途をたどる。

(1) 実用限度条件の仮定

小歯車は切り下げ防止限界転位歯車

噛合い相手歯車は標準並歯車

歯数比 = 1 : 6

工具圧力角 $\alpha_e = 20^\circ$

歯先の円弧厚は最小限 $0.25m_e$

但し $m_e \cdots$ 工具のモジュール

以上 1 組の歯車装置で

バックラッシュは $0.04m_e$

この時の噛合率 約 1.1 以上

を歯車の実用限度条件とし

* 助教授 機械工学科

小歯車の歯数に応じ、これら諸条件及諸寸法等の変移を以下により求めてみる。

(2) 転位の適用

切り下げ防止限界の転位係数 x_1 は

$$x_1 = 1 - \frac{z_1 \sin^2 \alpha_c}{2} \dots\dots\dots (1)$$

但し z_1 : 小歯車歯数

α_c : 工具圧力角 20°

歯先円直径 D_{k1} は

$$D_{k1} = (z_1 + 2 + 2x_1) m_c \dots\dots\dots (2)$$

歯底円直径 D_{r1} は

$$D_{r1} = D_{k1} - 2(2 + k) m_c \dots\dots\dots (3)$$

但し 式(2), (3) は DIN 870 方式を採用

m_c : 工具モジュール

k : 頂隙係数 0.25 とする。

歯先円弧歯厚 t_{k1} は 第 1 図より

$$t_{k1} = 2\varphi \times \frac{D_{k1}}{2} \dots\dots\dots (4)$$

但し $\varphi = \text{inv } \alpha_m - \text{inv } \alpha_k$

$$\cos \alpha_k = \frac{z_1 m_c \cos \alpha_c}{D_{k1}}$$

$$\text{inv } \alpha_m = \text{inv } \alpha_c + \frac{2x_1 \tan \alpha_c}{z_1} + \frac{\pi}{2z_1}$$

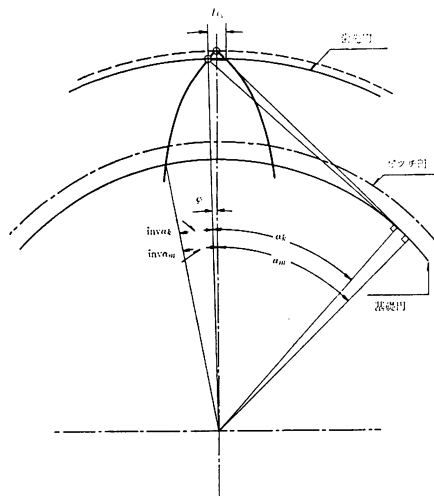
以上の式で表らわされる。

これら (1)(2)(3)(4) 式より第 2 表を得る。

この表より判ることであるが、歯先円弧歯厚 0.25

m_c 以上の条件を満足するのは歯数 10 枚以上の歯車であり、9 枚以下では歯先円直径を減らし、同時に全歯たけを減らさぬと、歯先円弧歯厚 $0.25m_c$ を得ることは出来ない。特に歯数 7 枚では歯先円弧歯厚が -0.1246 で歯先円直径 $10.18m_c$ となっているから、この歯先円直径は実在せぬ仮空のものであると言える。

つまりこの歯先円直径より小さい所で歯先の歯厚が 0 となった尖り円を形成しているのであって尖り円直径 D'_{k1} は



第 1 図

第 2 表

歯 数 z_1	転 位 係 数 x_1	歯 先 円 直 径 D_{k1}	歯 底 円 直 径 D_{r1}	全 歯 た け h	歯 先 円 弧 歯 厚 t_{k1}
16	0.0642 (0.06)	$18.12m_c$	$13.62m_c$	$2.25m_c$	$0.6395m_c$
15	0.1227 (0.12)	$17.24m_c$	$12.74m_c$	"	$0.6012m_c$
14	0.1812 (0.18)	$16.36m_c$	$11.86m_c$	"	$0.5535m_c$
13	0.2397 (0.24)	$15.48m_c$	$10.98m_c$	"	$0.4989m_c$
12	0.2981 (0.30)	$14.60m_c$	$10.10m_c$	"	$0.4358m_c$
11	0.3566 (0.36)	$13.72m_c$	$9.22m_c$	"	$0.3609m_c$
10	0.4151 (0.42)	$12.84m_c$	$8.34m_c$	"	$0.2716m_c$
9	0.4736 (0.47)	$11.94m_c$	$7.44m_c$	"	$0.1737m_c$
8	0.5321 (0.53)	$11.06m_c$	$6.56m_c$	"	$0.0382m_c$
7	0.5906 (0.59)	$10.18m_c$	$5.68m_c$		$-0.1246m_c$

[注] 本表では転位係数は実用性を考え () の数値を用い、歯先円直径等々を算出したものである。

$$D'_{k1} = z_1 m_c \frac{\cos \alpha_c}{\cos \alpha_m} \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{但し } \text{inv} \alpha_m = \text{inv} \alpha_c + \frac{2x_1 \tan \alpha_c}{z_1} + \frac{\pi}{2z_1}$$

第 3 表

歯 数 z_1	転 位 係 数 x_1	歯先尖り円直径 D'_{k1}	歯底円直径 D_{r1}	全 歯 た け h'	歯先円弧歯厚 t_{k1}
7	0.5906 (0.59)	$10.07m_c$	$5.68m_c$	$2.20m_c$	0
6	0.6490 (0.65)	$9.04m_c$	$4.80m_c$	$2.12m_c$	0
5	0.7076 (0.71)	$7.98m_c$	$3.92m_c$	$2.03m_c$	0
4	0.7660 (0.77)	$6.91m_c$	$3.04m_c$	$1.94m_c$	0
3	0.8245 (0.83)	$5.82m_c$	$2.16m_c$	$1.83m_c$	0
2	0.8830 (0.88)	$4.68m_c$	$1.26m_c$	$1.71m_c$	0

(3) 歯先円弧歯厚 $0.25m_c^*$ 以上の条件の適用。

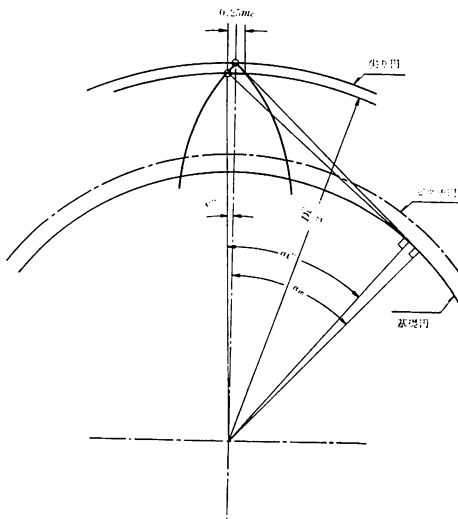
然し歯数 9 枚以下の切り下げ防止限界の転位歯車は、そのままでは第 2, 第 3 表のように歯先円弧歯厚が、何れも $0.25m_c$ 以下となり、最初に定めた条件を満足しないこととなるので、歯先円弧歯厚 $0.25m_c$ を得るような歯先円直径 D_{k1}'' を求めておかぬと、噛合率の算出も製作も出来ない。

それで次のような歯先円上の圧力角を求める無理函数式を導き出し、これを解いて D_{k1}'' を求めた。

第 2 図 参照

z : 歯 数

α_m : 尖り円上の圧力角



第 2 図

で表らわされるので、歯数 7 枚以下につき求めると、一応第 3 表のように実在可能なものを得る。

D_{k1}'' : 歯先円弧歯厚 $0.25m_c$ を得る歯先円直径

α_{k1}'' : D_{k1}'' 円上の圧力角

φ'' : 歯先円弧歯厚 $0.25m_c$ の中心角の半分とすれば

$$\varphi'' = \frac{0.25m_c}{D_{k1}''}$$

$$\cos \alpha_{k1}'' = \frac{zm_c \cos \alpha_c}{2} / \frac{D_{k1}''}{2} = \frac{z \cos \alpha_c \varphi''}{0.25}$$

$$\therefore \varphi'' = \frac{0.25 \cos \alpha_c}{z \cos \alpha_{k1}''}$$

所が $\varphi'' = \text{inv} \alpha_m - \text{inv} \alpha_{k1}''$ なるため

$$\text{inv} \alpha_m = \left(\frac{0.25}{z} \times \frac{1}{\cos \alpha_{k1}''} \right) \cos \alpha_{k1}'' + \text{inv} \alpha_{k1}'' \dots\dots\dots (5)$$

角度 α_{k1}'' を求めることが出来れば

$$D_{k1}'' = \frac{z \cos \alpha_c}{\cos \alpha_{k1}''} m_c$$

より歯先円直径を求めることが出来る。

然し式(5)は $\cos \alpha_{k1}''$, $\text{inv} \alpha_{k1}''$ 以外は既知 なるため α_{k1}'' のみに関する無理函数となっている。普通にこれを解く事は出来ないので、試算法に依って α_{k1}'' を求めた。

得られた結果の α_{k1}'' , D_{k1}'' 等々を第 2, 3 表の例にならない、まとめてみると第 4 表のようになる。

III. 噛 合 率

(1) 噛合率の検討

次にこれらの小歯車と歯数 6 倍の標準並歯車との噛合率が、どうなっているかを検討する必要がある。

第 4 表

歯 数 z	転 位 係 数 x	歯 先 歯 厚 $0.25m_c$ 上 角		歯先円直径 D_k''	歯底円直径 D_r	全 歯 た け h''	歯先円弧歯厚 t_k''
		α_k''	$\cos \alpha_k''$				
9	0.47	44°31.23'	0.7129996	11.86 m_c	7.44 m_c	2.21 m_c	0.25 m_c
8	0.53	46°12.04'	0.6921348	10.86 m_c	6.56 m_c	2.15 m_c	〃
7	0.59	48°06.74'	0.6676701	9.85 m_c	5.63 m_c	2.09 m_c	〃
6	0.65	50°19.54'	0.6394231	8.83 m_c	4.80 m_c	2.02 m_c	〃
5	0.71	52°56.74'	0.6025674	7.80 m_c	3.92 m_c	1.94 m_c	〃
4	0.77	56°08.56'	0.5571269	6.75 m_c	3.04 m_c	1.86 m_c	〃
3	0.83	60°12.48'	0.4963628	5.67 m_c	2.16 m_c	1.76 m_c	〃
2	0.88	65°40.41'	0.4119353	4.56 m_c	1.26 m_c	1.65 m_c	〃

必要なバックラッシュは軸間の中心距離を延ばして与える方式を採用する、とせば

軸間中心距離 A' は

$$\begin{aligned}
 A' &= A_0 + ym_c + \frac{f_n}{2\sin\alpha} \\
 &= \frac{z_1 + z_2}{2} m_c + \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos\alpha_c}{\cos\alpha} - 1 \right) m_c \\
 &\quad + \frac{f_n}{2\sin\alpha} \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

但し

A_0 : 標準歯車軸間中心距離

z_1 : 小歯車の歯数

z_2 : 相手歯車の歯数 $= 6z_1$

f_n : バックラッシュ $= 0.04m_c$

α : 背隙なしの嚙合圧力角

式(6)で表らわされる。

尚 バックラッシュなしの嚙合圧力角 α は次の式 (7) より求まる。

$$\operatorname{inv}\alpha = 2\tan\alpha_c \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} + \operatorname{inv}\alpha_c \dots\dots\dots (7)$$

但し

x_1 : 小歯車転位係数

x_2 : 相手歯車転位係数 $= 0$

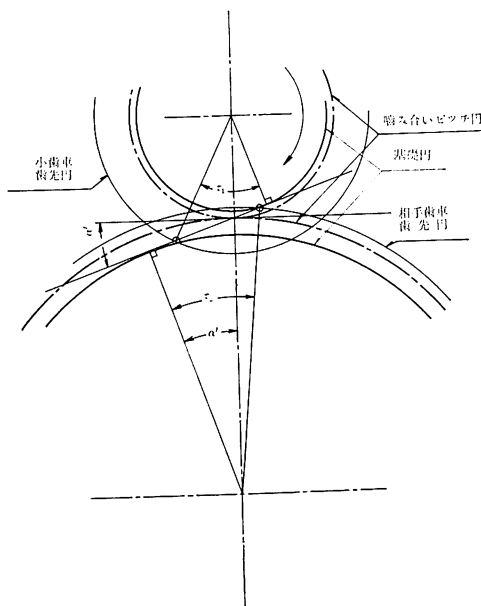
式 (6) (7) よりバックラッシュを含む 真の嚙合圧力角を求むることが出来る。

すなはち真の嚙合圧力角 α' は

$$\cos\alpha' = \frac{A_0 \cos\alpha_c}{A'} \dots\dots\dots (8)$$

で表らわされる。

第3図参照 小歯車を原動車とすれば



第 3 図

遠退き側嚙合率 n_1

近寄り側嚙合率 n_2

嚙合率 n は

$$\left. \begin{aligned}
 n_1 &= \frac{z_1}{2\pi} (\tan\tau_1 - \tan\alpha') \\
 n_2 &= \frac{z_2}{2\pi} (\tan\tau_2 - \tan\alpha') \\
 n &= n_1 + n_2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

で表らわされる。

但し

第 5 表

小歯車歯数 と転位係数		相手歯車 数と転位 係数		歯 合 圧 力 角		中心距離 A'	角 度		遠 退 き 側 嚙 合 率 n_1	近 寄 り 側 嚙 合 率 n_2	嚙合率 n
z_1	x_1	z_2	x_2	α	α'		τ_1	τ_2			
16	0.06	96	0	20°10.00'	20°19.64'	56.12 m_e	33°55.61'	22°59.91'	0.7965	0.8247	1.594
15	0.12	90	0	20°21.17'	20°31.24'	52.68 m_e	35°09.30'	23°10.87'	0.7877	0.7729	1.561
14	0.18	84	0	20°33.65'	20°44.21'	49.23 m_e	36°28.38'	23°23.27'	0.8035	0.7204	1.524
13	0.24	78	0	20°47.29'	20°58.39'	45.79 m_e	37°53.64'	23°37.39'	0.8172	0.6709	1.488
12	0.30	72	0	21°03.31'	21°15.00'	42.35 m_e	39°26.08'	23°53.65'	0.8280	0.6204	1.448
11	0.36	66	0	21°22.03'	21°34.37'	38.90 m_e	41°06.87'	24°12.55'	0.8358	0.5696	1.405
10	0.42	60	0	21°47.30'	22°00.31'	35.47 m_e	42°57.51'	24°34.81'	0.8388	0.5088	1.348
9	0.47	54	0	22°05.89'	22°19.89'	32.00 m_e	44°30.79'	25°01.43'	0.8198	0.4816	1.302
8	0.53	48	0	22°35.57'	22°50.56'	28.55 m_e	46°11.62'	25°33.83'	0.7911	0.4362	1.227
7	0.59	42	0	23°12.09'	23°28.22'	25.10 m_e	48°06.14'	26°14.17'	0.7580	0.3920	1.150
6	0.65	36	0	23°56.87'	24°14.39'	21.64 m_e	50°19.10'	27°05.83'	0.7210	0.3519	1.073
5	0.71	30	0	24°56.76'	25°15.92'	18.18 m_e	52°57.62'	28°14.48'	0.6789	0.3111	0.990
4	0.77	24	0	26°13.95'	26°35.27'	14.71 m_e	56°06.27'	29°50.47'	0.6289	0.2794	0.908
3	0.83	18	0	28°07.95'	28°32.07'	11.23 m_e	60°07.66'	32°15.03'	0.5716	0.2499	0.821
2	0.88	12	0	31°08.06'	31°36.37'	7.72 m_e	65°39.62'	36°20.75'	0.5078	0.2300	0.738

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \cos^{-1} \frac{D_{01}}{D_{k1}} \quad \text{又は} \quad \cos^{-1} \frac{D_{01}}{D_{k1}''} \\ \tau_2 &= \cos^{-1} \frac{D_{02}}{D_{k2}} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

D_{01} : 小歯車基礎円直径

D_{k1}, D_{k1}'' : 小歯車歯先円直径

D_{02} : 相手歯車基礎円直径

D_{k2} : 相手歯車歯先円直径

これらの式 (6) (7) (8) (9) (10) を計算し一括したものを第 5 表に示す。

この表より、小歯車歯数の小となるにつれ 10 枚までは遠退き側嚙合率は増加し、近寄り側嚙合率は減少し、総合して嚙合率の減小をきたしている事が判るが、何れの歯車も初条件を満たしている。

・ 歯数 9 枚以下では全歯だけが減少していくので、遠退き側嚙合率も減少し、総合嚙合率はますます小となり、歯数 6 枚以下では嚙合率は初条件の 1.1 に満たないため、小歯車歯数は 7 枚以上が一応実用限度と言える。

然し嚙合率の式 (9) (10) は大歯車の歯先が小歯車の歯元に干渉しない、言い換えれば大歯車の歯末面全部が

有効に嚙合い作用するというを前提とした式であるため、この点のチェックが尚必要となってくる。

又 DIN 方式による転位小歯車の利用を考えていたため、相手歯車との嚙合いにおいて、実際の頂隙がどうなっているか、実用上支障がないかどうかチェックしなければならない。

(2) 小歯車歯元干渉の有無と嚙合率

小歯車歯元に大歯車の歯先が干渉しないためには第 4 図において

$$\overline{O_{2e}} \geq \frac{D_{k2}}{2} \dots\dots\dots (11)$$

でなければならず $\overline{O_{2e}}$ は

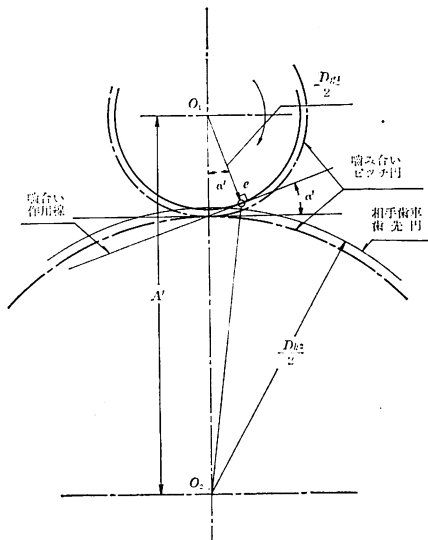
$$\overline{O_{2e}}^2 = (A')^2 + \left(\frac{D_{01}}{2}\right)^2 - 2A' \frac{D_{01}}{2} \cos \alpha'$$

より求まる。

小歯車歯数 7 枚以下につき、これらを求め対比すれば第 6 表のようになる。

小歯車数 3 枚以上は式 (11) が成立し干渉をおこさぬので第 5 表の嚙合率は正しい。

小歯車歯数 2 枚では式 (11) が成立せず干渉を起こす



第 4 図

第 6 表

小 歯 車 歯 数	$4 \overline{O_2 e}^2$	D_{k2}^2	摘 要
7	$1957.9308m_c^2$	$1936m_c^2$	干 渉 な し
6	$1495.9364m_c^2$	$1444m_c^2$	〃
5	$1035.1368m_c^2$	$1024m_c^2$	〃
4	$681.8868m_c^2$	$676m_c^2$	〃
3	$401.1480m_c^2$	$400m_c^2$	〃
2	$192.4984m_c^2$	$196m_c^2$	干 渉 す る

IV. 噛 合 い 頂 隙

小歯車歯元の頂隙 C_1

大歯車歯元の頂隙 C_2 は

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= A' - \left(\frac{D_{k2}}{2} + \frac{D_{r1}}{2} \right) \\ C_2 &= A' - \left(\frac{D_{k1}}{2} + \frac{D_{r1}}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

で表わされ、これらを第5表の歯車についてまとめてみると第7表のようになる。

この表より $z_1 = 2$ を除けば他の歯車装置の噛合頂隙はまず実用可能とみてよいものと思われる。

尚 $z_1 = 2$ に対する相手歯車の歯先円直径は III-(2) に述べたように寧ろ干渉障害ともなっているので、噛

ので、第5表の噛合率は訂正を必要とする。このため

$$\text{式 (10) } \tau_2 = \cos^{-1} \frac{R_{o2}}{R_{k2}} \text{ は}$$

$$\tau_2' = \cos^{-1} \frac{R_{o2}}{O_2 e} \text{ と代えねばならない。}$$

従ってこれを解けば

$$\tau_2' = 35^\circ 37.98' \text{ となるため}$$

近寄り側噛合率 n_2' は

$$\begin{aligned} n_2' &= \frac{z_2}{2\pi} (\tan \tau_2' - \tan \alpha') \\ &= 0.1937 \end{aligned} \text{ となるため}$$

結局噛合率 n は

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2' \\ &= 0.7015 \end{aligned} \text{ となり}$$

第5表の噛合率より尚更減少する。

合率に関係のない干渉部分だけ取り除いて歯先円直径を小にする。

すなわち

$$D_{k2}' = 2\overline{O_2 e} = 13.88m_c$$

と標準並歯車のそれより稍少さくしておけば頂隙 C_1' は

$$C_1' = 0.15m_c$$

となるため、頂隙に関することのみから言えばこれも実用可能と考えられる。

これより以下に記述する $z_1 = 2$ に噛合う大歯車の歯先円直径はすべてこの D_{k2}' を基にしたものである。

V. 二相歯車の応用

一つの歯面の接触角度 ε は

第 7 表

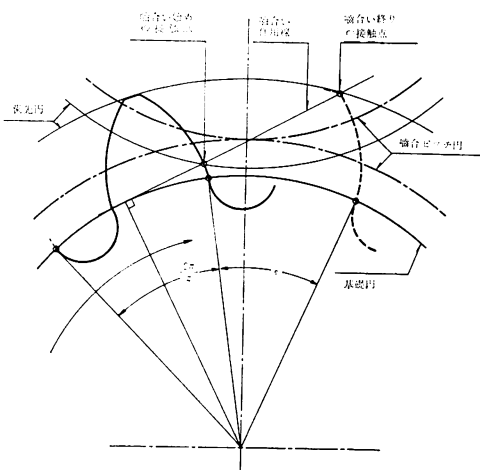
小歯車歯数 z_1	小歯車歯元の頂隙 C_1	大歯車歯元の頂隙 C_2
16	$0.31m_c$	$0.31m_c$
15	$0.31m_c$	$0.31m_c$
14	$0.30m_c$	$0.30m_c$
13	$0.30m_c$	$0.30m_c$
12	$0.30m_c$	$0.30m_c$
11	$0.29m_c$	$0.29m_c$
10	$0.30m_c$	$0.30m_c$
9	$0.28m_c$	$0.32m_c$
8	$0.27m_c$	$0.37m_c$
7	$0.26m_c$	$0.42m_c$
6	$0.24m_c$	$0.47m_c$
5	$0.22m_c$	$0.53m_c$
4	$0.19m_c$	$0.58m_c$
3	$0.15m_c$	$0.64m_c$
2	$0.09m_c$	$0.69m_c$

$$\varepsilon = n \times \frac{2\pi}{z}$$

但し n : 嚙合率

z : 歯 数

で表らわされる。第5図参照



第 5 図

尚前述の小歯車歯数 $z = 6 \sim 2$ の場合は

$$n = 1.07 \sim 0.70 \text{ である。}$$

殊に $n < 1$ の場合を考えると

一つの歯面が嚙み合い終っても、角度 $\frac{2\pi}{z}$ はなれた隣の歯面が嚙み合い始めの点まで来ていないため、この小歯車を主動車とすれば、従動車に対し運動及動力の伝達は連続的に行なわれず、不円滑に行なわれるため一般的には確かに、小歯車歯数 6 枚以下のものの嚙み合い利用は不能であると言われても致し方ない。

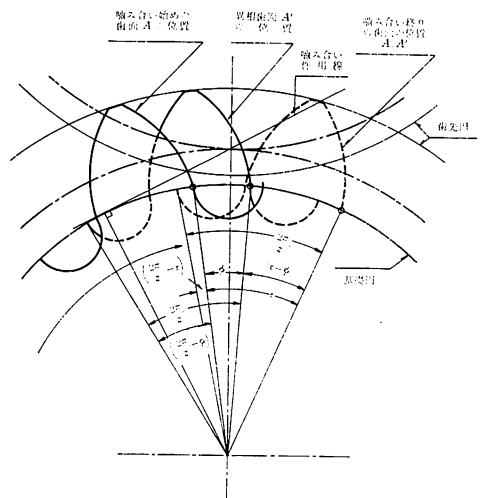
然し同大、同形の歯車がもう一組同じ軸上に取付角度を違えて配列されているとしたら、どうなるであろうか。

(これを二相歯車 Double phase gear と仮称す)

(1) 異相角の解析

第6図は二相歯車の一部を示したものであるが、これは A 車の歯面より回転方向に任意の角度 ϕ だけ進んだ歯面をもつ A' 車 (A 車の歯面より回転方向に角度 $(\frac{2\pi}{z} - \phi)$ だけ遅れた歯面をもつ A' 車とも言える) が同じ軸上に取付けられている場合を示しているものであって、相手歯車も二相となっていなければならないのは勿論のことで、この場合の嚙み合いについて考えてみる。

A 車の一歯面が嚙み合い始めた時、A' 車の一歯面 (A 車より角度 ϕ 進んだ歯面) はすでに嚙み合い途上にあるので、A' 車が嚙み合い終りの歯面位置にくるまで A, A' 車それぞれの歯面が相手歯車と嚙み合い接触を行うこととなる。従って歯面二組が接触して行なわれる嚙み合い角度はまづ $(\varepsilon - \phi)$ である。然し



第 6 図

A 車が噛み合い終りの歯面位置まで来た時、A 車より $\left(\frac{2\pi}{z}-\phi\right)$ 遅れた歯面 A' が少くとも噛み合い始めの位置まで来ていなければ、噛み合いは円滑に継続できないことは明らかである。

$$\text{即ち } \frac{2\pi}{z} - \phi \leq \varepsilon$$

$$\frac{2\pi}{z} \leq \varepsilon + \phi \quad \dots\dots\dots (13)$$

が噛み合い継続の条件となり、この式を満足する ϕ の位置に A' 車歯面を設定すればよいこととなる。

$$\text{i) } \frac{2\pi}{z} = \varepsilon + \phi \quad \text{に } \phi \text{ を定めれば}$$

A 車側の歯面は噛み合い始めた時から角度 $(\varepsilon - \phi)$ の間は A' 車の歯も同時に運動伝達に与り、噛み終りの手前角度 ϕ が A 車一枚の歯だけで運動伝達が行なわれていることとなる。

又 A' 車側の歯面から言えば噛み合い始めた時から角度 ϕ が A' 車一枚の歯だけで運動伝達に与り、その後 $(\varepsilon - \phi)$ の間は A 車の歯も同時に作用した状態となるのである。

$$\text{ii) } \frac{2\pi}{z} < \varepsilon + \phi \quad \text{に } \phi \text{ を定めれば}$$

A 車側の歯面は噛み合い始めた時から角度 $(\varepsilon - \phi)$ の間 A, A' 両歯が作用し、その後 $\left(\frac{2\pi}{z} - \varepsilon\right)$ の間は A 車の歯面のみが作用し、その後噛み合い終りより手前角度 $\left\{\varepsilon - \left(\frac{2\pi}{z} - \phi\right)\right\}$ の間は又 A, A' 両歯面が作用することとなる。

同様に A' 車側の歯面より言えば、噛み合い始めの点より角度 $\left\{\varepsilon - \left(\frac{2\pi}{z} - \phi\right)\right\}$ の間は A 車の歯面も作用、又噛み合い終りより手前角度 $(\varepsilon - \phi)$ の間は A 車の歯面も作用し、中間の角度 $\left(\frac{2\pi}{z} - \varepsilon\right)$ は A' 車の歯面のみで作用していると言える。

この事より A 車, A' 車 とも歯面一組噛み合いとなるのは中間の位置で角度は $\left(\frac{2\pi}{z} - \varepsilon\right)$ であり、異相角 ϕ には無関係である。但しこの一組噛み合い角度を狭んで二組噛み合い角度が前後にそれぞれ $\left\{\varepsilon - \left(\frac{2\pi}{z} - \phi\right)\right\}$ 及 $(\varepsilon - \phi)$ 存在する。

iii) A, A' 両車ともに、噛み合い始めの点からの二組噛み合い角度（又は噛み合い終りより手前の二組噛み合い角度）を異ならざるようにすれば

$$\left\{\varepsilon - \left(\frac{2\pi}{z} - \phi\right)\right\} = (\varepsilon - \phi)$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{z} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となり、これを用いると
噛み合い始めよりのと、噛み合い終り手前の二組噛み合い角度は共に等しく、それぞれ $\left(\varepsilon - \frac{\pi}{z}\right)$ となる。

歯車逆転時にもこれは変りない事になるので非常に都合も良い。

依って異相角は式 (14) に決定する。

(2) 二相歯車の総合噛合率

それでは単相の噛合率 $n < 1$ に相当する歯車を二相歯車として使用する場合、総合噛合率がどうなるか考えてみることにする。

歯車が一ピッチ分の角度 $\frac{2\pi}{z}$ 回転する間の噛合作用を考えると

先づ A 車の歯面で角度 ε 回転する間に、A, A' 両歯面が共に作用している角度は $\left(\varepsilon - \frac{\pi}{z}\right) \times 2$, A 車だけの歯面が作用している角度は $\left(\frac{2\pi}{z} - \varepsilon\right)$ である。

次に角度 $\left(\frac{2\pi}{z} - \varepsilon\right)$ は A' 車の歯面だけが作用し、結局一ピッチ分の角度回転を終了する。

斯くして最初の状態に戻り、これを繰り返すことによって継続的に運動の伝達が行なわれるので、

二組の歯車が一回転同時に噛合っている割合いは

$$\frac{\left(\varepsilon - \frac{\pi}{z}\right) \times 2}{\frac{2\pi}{z}} = 2n - 1 \quad \dots\dots\dots (a)$$

一組の歯車が一回転中噛合っている割合いは

$$\frac{\left(\frac{2\pi}{z} - \varepsilon\right) \times 2}{\frac{2\pi}{z}} = 2 - 2n \quad \dots\dots\dots (b)$$

従って総合噛合率 N は

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) より } N = 1 + (2n - 1) = 2n \\ \text{又 (b) より } N = 2 - (2 - 2n) = 2n \end{array} \right\} \quad \dots\dots (15)$$

結局二相歯車を利用した総合噛合率 N が 1.1 以上となれば仮定条件を満足した噛み合いが出来ることとなる。

即ち 単相歯車一組の噛合率 n が

$$n \geq 0.55$$

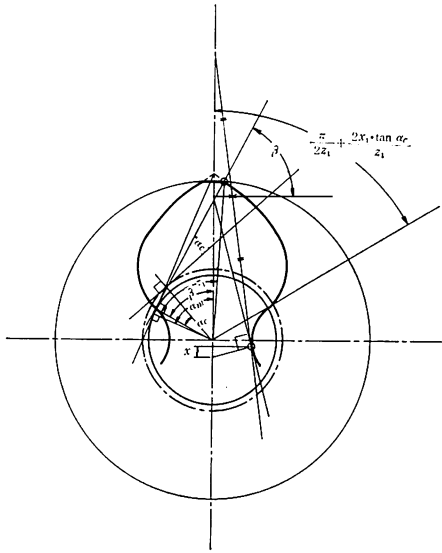
であれば条件を満足し得る。

従って今迄利用不能と思はれた第 5 表の歯数 $z = 6 \sim 2$ まで、すべてこの二相歯車方式を用いることにより、噛み合いは理論的に成立する。

VI. 強度上の問題

(1) 歯の強度

歯の強度はルイスの歯形係数で概むねその比較がなされるので、それを求める。



第 7 図

第 7 図より、歯形係数 y は

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{m_c} \cdot \frac{\cos \alpha_c}{\cos \beta}$$

$$\text{但し } \beta = \tan \tau_1 - \left(\frac{\pi}{2z_1} + \frac{2x_1 \tan \alpha_c}{z_1} + \text{inv} \alpha_c \right) \\ = \tan \tau_1 - \text{inv} \alpha_m$$

図中の長さ x 以外はこれまでにすべて求められているから、歯形曲線を描き長さ x を実測することにより、歯形係数 y は求まる。

歯形曲線はラック形カッターにより創成され、そのカッターの形状に左右されるので、ラック形カッターの形状は JIS 規格通りとした。

即ち 圧力角 $\alpha_c = 20^\circ$ 、頂隙 $C = 0.25m_c$ 、頂隙部とラックを結ぶ曲率半径 $r = 0.375m_c$ とした。

例えば $m_c = 20\text{mm}$ のカッターによる

歯数 $z_1 = 2$ 、転位係数 $x_1 = 0.08$ の創成歯形曲線を描き、長さ x を実測した処

$$x = 4.8 \sim 4.9\text{mm}$$

が求められた。

従って、ルイスの歯形係数 y は

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4.8 \sim 4.9}{20} \cdot \frac{0.9396926}{0.4624245} = 0.32512 \\ \sim 0.33190$$

となった。

然し歯形曲線の作図並に長さ x の実測には、かなり誤差を生じ精確とはいえないので、この方法で求めた歯形係数は最小値を採用することとした。

まとめてみると第 8 表のようになる。

この表より、歯数 7 枚以下の歯形係数が歯数 10 枚のものに比し、寧ろ大となったり、或いは余り小とならないのは、切り下げ除止限界まで (+) 転位歯切りを行うと共に、歯先円弧歯厚が $0.25m_c$ となるよう全歯たけを短かくしているためである。

尚第 8 表の小歯車と噛合う相手の標準並車の歯形係数 y は

$$y = 0.433 \quad z_2 = 10 \times 6 = 60$$

$$y = 0.409 \quad z_2 = 7 \times 6 = 42$$

$$y = 0.377 \quad z_2 = 5 \times 6 = 30$$

$$y = 0.277 \quad z = 2 \times 6 = 12$$

と表らわされているので、ルイス式の歯形係数を歯の強度の尺度と考えれば、歯数 7 枚以下の小歯車の歯はこれと噛合う大歯車の歯に比らば充分に強い事となり、この場合大小歯車が同一材質で構成されていれば大歯車側の歯の強度によって回転力は制限され定まる

第 8 表 工具圧力角 20° の歯形係数

歯 車 形 状				歯 形 係 数
歯 数	転 位 係 数	全 歯 た け	歯 先 円 直 径	y
10	0.42	$2.25m_c$	$12.84m_c$	0.369
7	0.59	$2.09m_c$	$9.85m_c$	0.433
5	0.71	$1.94m_c$	$7.80m_c$	0.449
2	0.88	$1.65m_c$	$4.56m_c$	0.325

ものであって、小歯車側の歯の強さを問題にする必要はない。

(2) 軸の強度

歯数7～2枚の前記小歯車は歯の強度よりみれば、大歯車側の歯の強さによって回転力が定まり、歯の大きさ（モジュール）も定まるのであるが、小歯車は歯数が少い程歯車の大きさが小さくなる。

これに伴い小歯車の軸径が小さくなるので、必要な回転力を伝達し得る大きさの軸径が得られるかどうか問題である。

小歯車の軸径		d_1
小、大歯車の伝えるトルク		T_1, T_2
小、大歯車の歯数		z_1, z_2
小歯車軸の許容剪断応力		τ_1
大歯車の歯の許容曲げ応力		σ_{b2}
小、大歯車の歯形係数		y_1, y_2
モジュール		m_c
歯 巾		b
軸間中心距離		A'

$$\left. \begin{array}{l} z_2 = 6z_1 \\ b = \phi \pi m_c \\ A' = a' m_c \end{array} \right\} \text{で表わせば}$$

廻転力

$$T_2 = b m_c y_2 \sigma_{b2} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} A' \right) = \phi \pi m_c^3 y_2 \sigma_{b2} \frac{6}{7} a'$$

$$T_1 = \frac{z_1}{z_2} T_2 = \phi \pi m_c^3 y_2 \sigma_{b2} \frac{1}{7} a'$$

第 9 表

歯 車 材 質 組 合 せ	許 容 強 さ (kg/cm ²)	小 歯 車 軸 径		
		$\phi = 1$	$\phi = 2$	$\phi = 3$
a) 大歯車, FC19 小歯車, FC19	$\sigma_{b2} = 900$ $\tau_1 = 80$ (特に低目に仮定)	$3.86m_c$	$4.78m_c$	$5.47m_c$
b) 大歯車, FC19 小歯車, SC41	$\sigma_{b2} = 900$ $\tau_1 = 160$ (特に低目に仮定)	$3.02m_c$	$3.86m_c$	$4.34m_c$
c) 大歯車, S25C 小歯車, SC41	$\sigma_{b2} = 2100$ $\tau_1 = 160$ (特に低目に仮定)	$4.00m_c$	$5.04m_c$	$5.77m_c$

然しこの小歯車の歯先円直径は $D_k' = 4.56m_c$ 、歯底円直径は $D_r = 1.26m_c$ であるから、第9表の小歯車軸径はどれも歯底円直径より大きく、条件によっては歯先円直径よりも大とせねばならない事が判る。

従って歯車と軸は一体式でなければならない。

となる。

小歯車軸が回転力だけに対応出来る強度のものと仮定すれば

$$\text{公式 } \frac{\pi d_1^3}{16} = \frac{T_1}{\tau_1} \text{ より}$$

$$\therefore d_1 = \sqrt[3]{\phi y_2 \frac{\sigma_{b2}}{\tau_1} \cdot \frac{16}{7} a' \cdot m_c} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。

然し小歯車軸はねじりモーメントばかりでなく曲げモーメントも当然受けると考えねばならない。曲げモーメントは未だ不明の状況という考慮の下に、前記(16)式中 τ_1 の値を低く定ため、小歯車軸径を算出しても良いと思う。

この軸径が小歯車の歯底円直径よりかなり小さければ、歯車と軸は組立式となし得るが、それ以外では歯車と軸は同一材質による一体式となさねばならぬ事は明白である。

(3) 歯数二枚の場合の軸径

次に歯数最小の小歯車 ($z_1 = 2, y_1 = 0.325$) を例にとって考える。

噛合い相手歯車は $z_2 = 12, y_2 = 0.277$ であり、二軸間距離はこれまでに求めて来たことにより $a' = 7.72$ であるから (16) 式より

$$d_1 = 1.696 m_c \sqrt[3]{\phi \frac{\sigma_{b2}}{\tau_1}}$$

となり、材質、歯巾係数を組み合わせることによって第9表が得られる。

VII. 歯数の少い小歯車の製法

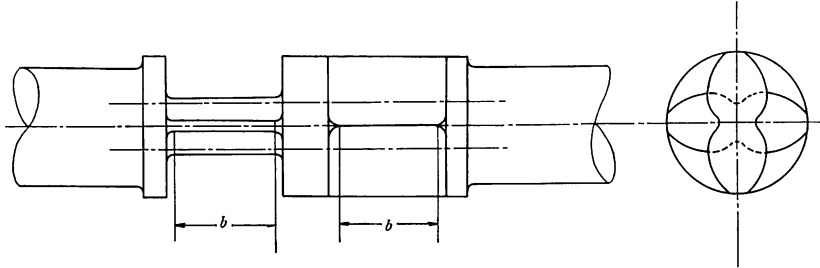
歯切りによる歯車の製法では普通、その軸径は歯底円直径より大とは出来ない。

従って小歯車の軸径が歯底円直径より大となるよう

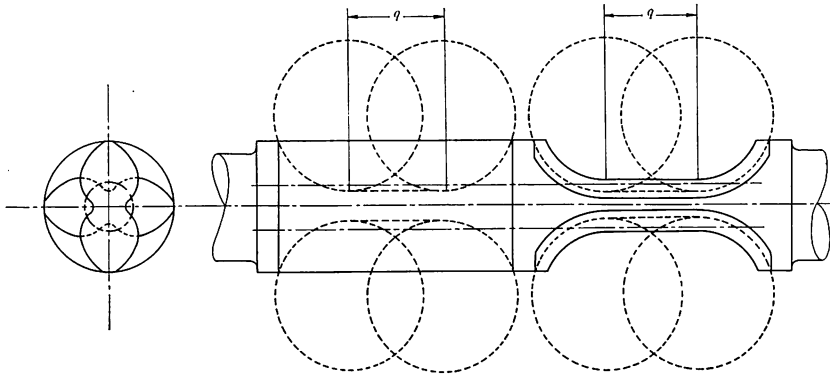
な場合は鋳造法（出来得れば精密鋳造法）に頼るしか製作し得ない，という制限を受ける。

歯数二枚の小歯車は当然この制約された製作法に頼るしかない。第8図

ただ歯車軸の方向にかなり長さのゆとりをもち得る装置の場合だけは第9図のように歯切り法で製作することは可能である。



第 8 図



第 9 図

VIII. 速比 6 の減速装置の大きさ

同じ回転力を伝達する，モジュールの等しい歯車装置は小歯車の歯数に対応して，その大きさが如何に変化するか今まで記したデータをもとに比較すれば第10図のように小歯車の転位製作の効果は著しい。

すなわち $z_1 = 2$ の場合は $z_1 = 12$ の場合に比較し，噛合率はほぼ同じで，軸直角方向の大きさは 1 : 5 と非常に小型となる。

IX. 歯車装置の構造及組立

二相歯車を用いる歯車装置は，軸直角方向より歯車軸を動かして歯車を噛み合はし，組立て又は分解をなし得るような特殊の構造としなければならない。

これは大きな欠点と言えよう。

X. 結 言

限定された小歯車製作法並に歯車装置の構造を考慮することによって，

小歯車歯数二枚（但し二相），速比 6 の歯車装置を得ることは可能である。

且つ歯車装置の大きさも小型に出来る上，噛合率にも遜色がないので，充分実用に供し得るものと考ええる。

今後製作実験の段階を持ちこれらを確認する積りである。

尚歯数一枚の転位二相歯車について言及しなかったのは，相手歯車の歯数が六枚となり，これは余り切下げが多く実用的な標準歯車とならない為である。

相手歯車にも転位を適用するか又は速比の大きな標

z_1	14	12	10	7	5	2
x_1	0	0.3	0.42	0.59	0.71	0.88
z_2	84	72	60	42	30	12
A	$49m_c$	$42.35m_c$	$35.47m_c$	$25.10m_c$	$18.18m_c$	$7.72m_c$
R_{k1}	$8m_c$	$7.30m_c$	$6.42m_c$	$4.93m_c$	$3.90m_c$	$2.28m_c$
R_{k2}	$43m_c$	$37m_c$	$31m_c$	$22m_c$	$16m_c$	$6.94m_c$
嚙合率	1.46	1.448	1.348	1.150	(二相) 1.98	(二相) 1.403

第 10 図

準並歯車を組合すことで、歯数一枚歯車の利用が可能かどうか、についても今後検討してみたい。

主な参考文献

1) 仙 波：歯車Ⅲ

2) 窪 田：歯車入門

3) 中 田：転位歯車

4) 中 田：歯車とその検査

5) 明川，歌川：歯車の設計

(昭和44年12月15日受理)