

# 火力発電機群の起動停止ユニットの決定 (離散形最大原理の適用)

山 城 迪\*

Units Commitment by the Discrete Maximum Principle

(Department of Electrical Engineering)

Susumu YAMASHIRO

## 要 旨

筆者は、先に火力発電機群の起動停止問題におけるダイナミック・プログラミング等の適用<sup>1)</sup>を報告したが、本稿は、この問題に離散形最大原理の適用を試み、さらにダイナミック・プログラミングとの比較検討を行ったものである。

## Synopsis

In the previous paper, the author analyzed generating thermal units commitment by the dynamic programming. In this paper, the discrete maximum principle is applied to the same problem and these two methods are compared about their features.

## I. 緒 言

ポントリヤギンの最大原理<sup>2)</sup> (maximum principle) は、本来、系が微分方程式で記述される場合に適用可能であるが、この最大原理を差分方程式で表わされるような系に対して適用出来るように変形したものが、ここで扱う離散形最大原理<sup>3)</sup> (discrete maximum principle) である。

我国においては、従来、主として貯水池運用問題を主体とした電力系統の経済運用計算等にこの手法の適用がみられるが<sup>4)</sup>、本稿は、火力発電機群の起動停止問題 (unit commitment) に離散形最大原理を適用したものである。

火力発電機群の起動停止問題は一言にして云えば、起動費も含めた考察期間中の総運転費 (= 燃料費 + 起動) を最小化するには、系統の負荷変化に応じて、並、解列すべきユニットを如何に決定するかということである。この問題に対しては、停止優先順位 (priority) による方法、あるいは動的計画法 (dynamic programming) 等が報告されているが前者は問題の解析に先立ってあらかじめ停止優先順位を決めておかねばならないこと、また後者については主として電算機の記憶容量の制限から、状態変数の増加に対しては、その適用範囲についてかなりの制約を受ける等の欠点を有して

いる。

一方、離散形最大原理によれば、上述の D, P 法の持つ欠点を取り除くことが出来、さらに火力系のみならず、広く水力系をも含んだ電力系統に対しても、その適用範囲を容易に拡張することが出来る。従って水・火力系統の経済運用問題に対して離散形最大原理という一つの手法により、統一的な解析が可能であるという特徴を持つている。

さて、ここでは水・火力系統の経済運用問題に取りかかるための一段階として、以下に火力系における起動停止問題を離散形最大原理により定式化を行い、簡単な数値計算を行った。

## II. 離散形最大原理による起動停止問題の定式化

まず、離散形最大原理による、一般的な定式化の手順を説明する。なおアルゴリズムの誘導については付録を参照願いたい。

(1) 状態変数について  $n$  段と  $n-1$  段の変換式を求める。

$$X^n = T^n (X^{n-1}, \theta^n) \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

ただし  $X$ :  $s$  次元状態ベクトル

$\theta$ :  $r$  次元制御ベクトル

$T$ : 変換オペレーター

\* 講師 電気工学科

- (2) 最終段の状態変数  $X_N$  を用いて系の目的関数  $J$  を作る。

$$J(X_N) = \sum_i C_i X_i^N \quad (2)$$

- (3) ハミルトン関数  $H^n$  を求める。

$$H^n = \sum_{i=1}^{i=S'} Z_i^n T_i^n (X^{n-1}, \theta^n)$$

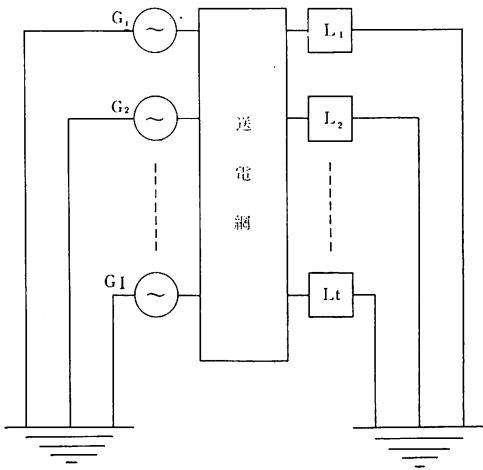
- (4) 随伴変数の変換式を求める。

$$Z_i^{n-1} = \frac{\partial H^n}{\partial X_i^{n-1}}$$

(5) (1)~(4)の如く状態変数, 目的関数, ハミルトン関数, 随伴変数が求まれば, 最適制御変数を次の条件式から求めればよい。

$$\frac{\partial H^n}{\partial \theta_i^n} = 0 \quad \text{または} \quad H^n = \text{最大} \quad (5)$$

さて, 上に述べたアルゴリズムに従つて, 火力発電機群の起動停止問題の定式化を試みよう。



第 1 図 一般的な火力系統

いま, 第1図に示すような合計  $I$  台からなる火力発電機群の日間運用を考える。考察期間を  $N$  分割し, No.  $i$  ユニット ( $i = 1, 2, \dots, I$ ) が第  $n$  時間帯 ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) において, 系統に並列している状態を  $X_i^n = 1$ , 解列している状態を  $X_i^n = 0$  で表わすものとする。

また制御変数については,  $n$  時間帯において No.  $i$  ユニットが, 起動する場合, 停止する場合, および  $(n-1)$  時間帯での状態を継続する場合を各々,  $\theta_i^n = 1, \theta_i^n = -1, \theta_i^n = 0$  で表わすものとする。即ち

$X_i^n = 1$ ,  $n$  時間帯で  $i$  号機 並列状態

$$\begin{aligned} X_i^n &= 0, & & \text{解列状態} \\ \theta_i^n &= 1, & & \text{起動する} \\ \theta_i^n &= -1, & & \text{停止する} \\ \theta_i^n &= 0, & & (n-1) \text{ 時間帯での状態を継続する。} \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式で定義された  $X_i^n, \theta_i^n$  を用いれば, 状態変数に関する  $n$  段と  $n-1$  段の関係は

$$\begin{aligned} X_i^n &= X_i^{n-1} \theta_i^n & n &= 1, 2, \dots, N \\ & & i &= 1, 2, \dots, I \end{aligned} \quad (7)$$

またはベクトル形式で

$$X^n = X^{n-1} \theta^n$$

状態変数としては, さらに各ユニットの累積運転費を加えるものとする。即ち

$$X_{i+I}^n = X_{i+I}^{n-1} + F_i^n (G_i^n) + \delta FS_i^n \quad (8)$$

ただし

$F_i^n$ :  $n$  時間帯での No.  $i$  ユニットの燃料費

$G_i^n$ : " " " 出力で

$\underline{G} \leq G_i^n \leq \bar{G}_i$  の上・下限値をもつ。

$\delta FS_i^n$ :  $n$  時間帯での No.  $i$  ユニットの増分起動費で次式で示される。

$$\delta FS_i^n = \frac{dFS_i^n}{dt} = \frac{dK_{st}}{dt} = K_i$$

$K_i$ : 定数

$t$ : 停止時間

次に求めるのは目的関数であるが, これは我々の目的が総運転費を最小にすることだから(8)式の状態変数  $X_{i+I}^N$  の線形結合で表わすものとする。

$$J = \sum_{i=1}^I C_i X_{i+I}^N = \sum_{i=1}^I X_{i+I}^N \quad C_i = 1 \quad (9)$$

または

$$J = - \sum_{i=1}^I X_{i+I}^N \quad C_i = -1 \quad (10)$$

従つて, 我々の問題は, 結局(9)式を最小にするような, 各時間帯における制御変数  $\theta^n$  および, 火力出力  $G^n$  を決定することになる。

この問題はまた,  $C_i = -1$  とおけば(10)式の最大化問題と考えてよい。さて離散形最大原理のアルゴリズムによれば, 次に定義するハミルトン関数  $H^n$  を新たに導入し, その結果最適制御変数は,  $H^n$  を最大にする制御変数によつて与えられる。ここでハミルトン関数は,

$$\begin{aligned} H^n &= \sum_{i=1}^I Z_i^n T_i^n (X^{n-1}, \theta^n) \\ &= \sum_{i=1}^I \{ Z_i^n (X_i^{n-1} + \theta_i^n) + Z_{i+I}^n (X_{i+I}^{n-1} + \theta_i^n) \} \end{aligned} \quad (11)$$

$$+F_i^n(G_i^n)+\delta FS_i^n\}$$

一方、出力  $G_i^n$  に関しては次式を満足する

$$PR^n - \sum_{i=1}^I G_i^n = 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (12)$$

ただし  $PR$  : 系統負荷

(12)式に対するラグランジュ乗数  $\lambda^n$  を導入すると(11)式のハミルトン関数は次式のようになる。

$$H_n = \sum_{i=1}^I \{Z_i^n T_i^n(X^{n-1}, \theta^n) + Z_{i+I}^n T_{i+I}^n(X^{n-1}, \theta^n)\} - \lambda^n (PR^n - \sum_{i=1}^I G_i^n) \quad (13)$$

次に状態変数に対応する随伴変数は(4)式を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} Z_{i+I}^{n-1} &= \frac{\partial H_n}{\partial X_{i+I}^{n-1}} = Z_i^n \\ Z_i^{n-1} &= \frac{\partial H_n}{\partial X_i^{n-1}} = Z_{i+I}^{n-1} \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (14)$$

離散形最大原理の終端条件によれば、状態変数の終端値が未定の場合は、最終時間帯における随伴変数は目的関数を状態変数で偏微分したもので与えられるから

$$Z_{i+I}^{N-1} = \frac{\partial J}{\partial X_{i+I}^{N-1}} = C_i = -1 \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (15)$$

従つて、(14)式より

$$Z_i^{N-1} = -1 \quad (16)$$

次に最適制御変数の決定であるが、まず火力出力については(13)式のハミルトン関数を  $G_i^n$  で偏微分して零とおけば

$$\frac{\partial H_n}{\partial G_i^n} = Z_{i+I}^n \left( \frac{\partial F_i^n(G_i^n)}{\partial G_i^n} \right) + \lambda^n = 0 \quad (17)$$

(17)式に(16)式を代入して

$$\frac{\partial F_i^n(G_i^n)}{\partial G_i^n} = \lambda^n \quad i = 1, 2, \dots, I \quad (18)$$

$\lambda^n$  は増分燃料費であり、通常の等増分燃料費則により、火力出力を決定すればよいことがわかる。また(6)式の  $\theta_i^n$  については  $H^n$  を最大にするような  $\theta_i^n$  を求めればよい。

火力出力の制限  $G_i \leq G_i \leq \bar{G}_i$  については、(8)式で求めた  $G_i^n$  がその上下限を越える場合には、その上下限値に固定することによって処理する。

### III. 簡単なモデル系統への適用

火力発電機群の起動停止問題としては最も簡単な例として、火力2機系統の場合を考え、その結果から初期随伴変数の持つ物理的意味および離散形最大原理の

特徴を述べることにする。

まず、前節の定式化の手順に従つて議論を進めることにする。

状態変数については、1号機、2号機の並・解列状態を  $X_1^n, X_2^n$  とすると(7)式から

$$\begin{aligned} X_1^n &= X_1^{n-1} + \theta_1^n \\ X_2^n &= X_2^{n-1} + \theta_2^n \end{aligned} \quad (19)$$

さらに、1、2号機の累積運転費を  $X_3^n, X_4^n$  とすれば(8)式に従つて

$$\begin{aligned} X_3^n &= X_3^{n-1} + F_1^n(G_1^n) + \delta FS_1^n \\ X_4^n &= X_4^{n-1} + F_2^n(G_2^n) + \delta FS_2^n \end{aligned} \quad (20)$$

系の目的関数は1、2号機の総運転費であるから、(10)式を用いて

$$J = - \sum_{i=1}^2 X_{i+2}^N = -(X_3^N + X_4^N) \quad (21)$$

(13)式のハミルトン関数は

$$\begin{aligned} H^n &= Z_1^n (X_1^{n-1} + \theta_1^n) + Z_2^n (X_2^{n-1} + \theta_2^n) \\ &+ Z_3^n (X_3^{n-1} + F_1^n(G_1^n) + \delta FS_1^n) \\ &+ Z_4^n (X_4^{n-1} + F_2^n(G_2^n) + \delta FS_2^n) \\ &- \lambda^n (PR^n - G_1^n - G_2^n) \end{aligned} \quad (22)$$

次に随伴変数は(14)式から

$$\begin{aligned} Z_1^{n-1} &= Z_1^n, \quad Z_2^{n-1} = Z_2^n \\ Z_3^{n-1} &= Z_3^n, \quad Z_4^{n-1} = Z_4^n \end{aligned} \quad (23)$$

一方、(21)式と(15)式より

$$Z_3^N = Z_4^N = -1 \quad (24)$$

(23)式を用いて

$$Z_3^n = Z_4^n = -1 \quad (25)$$

従つて(22)式は

$$\begin{aligned} H^n &= Z_1^n (X_1^{n-1} + \theta_1^n) + Z_2^n (X_2^{n-1} + \theta_2^n) \\ &- (X_3^{n-1} + F_1^n(G_1^n) + \delta FS_1^n) - (X_4^{n-1} \\ &+ F_2^n(G_2^n) + \delta FS_2^n) - \lambda^n (PR^n \\ &- G_1^n - G_2^n) \end{aligned} \quad (26)$$

$n$  段における最適火力出力は(26)式を  $G_i^n$  で偏微分して零とおくと

$$\frac{\partial F(G_1^n)}{\partial G_1^n} = \frac{\partial F_2^n(G_2^n)}{\partial G_2^n} = \lambda^n \quad (27)$$

以上、説明した(19)～(27)式に従つて、計算を  $n=1$  から  $n=N$  まで進めて行くが、第2図に計算のフローチャートを示す。離散形最大原理は与えられた境界値(出発値および終端値)を満足する最適運動曲線を求めることあるが、実際の計算を行う場合、状態変数に対応する随伴変数の初期値の修正如何により、その有用性が決まると云つても過言ではない。第3図のよう

な日間運用の負荷曲線において、負荷ピーク時を考察期間の出発点に取れば、1, 2号機共系統に並列されているとして、並・解列状態を示す(19)式の状態変数の初期値は、

$$X_1^0 = 1, \quad X_2^0 = 1 \quad (28)$$

また、累積運転費  $X_3^0, X_4^0$  については、

$$X_3^0 = 0, \quad X_4^0 = 0 \quad (29)$$

として計算を行う。

次に、 $X_1^n, X_2^n$  に対応する随伴変数の初期値  $Z_1^0$  は未定だから、任意の値を取りうる。

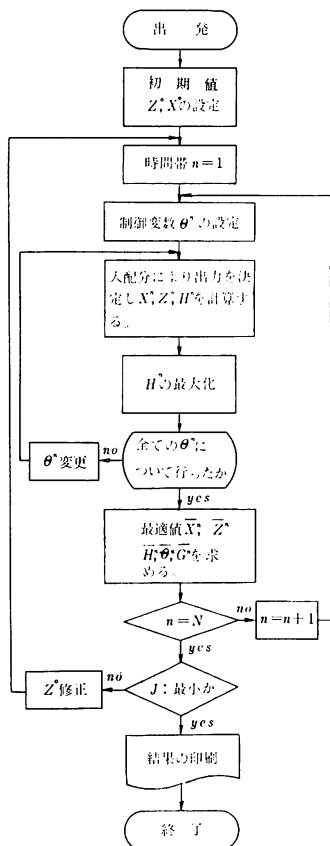
ここで、(26)式のハミルトン関数から解るように、随伴変数  $Z_1^n, Z_2^n$  は累積運転費と同じ次元を有し、これらは、各々、1号機および2号機の並列化ないしは解列に対する、一種のウェイトと考えることができる。

つまり、 $Z_1^n$  に大きな値、従って初期値  $Z_1^0$  に大きな値を与えると、最適制御変数は、1号機を並列化するような決定を行う。また逆に  $Z_1^0$  が充分小さな値を取る場合には、1号機を解列するような運用が得られる。同じことが2号機の  $Z_2^0$  についても云える

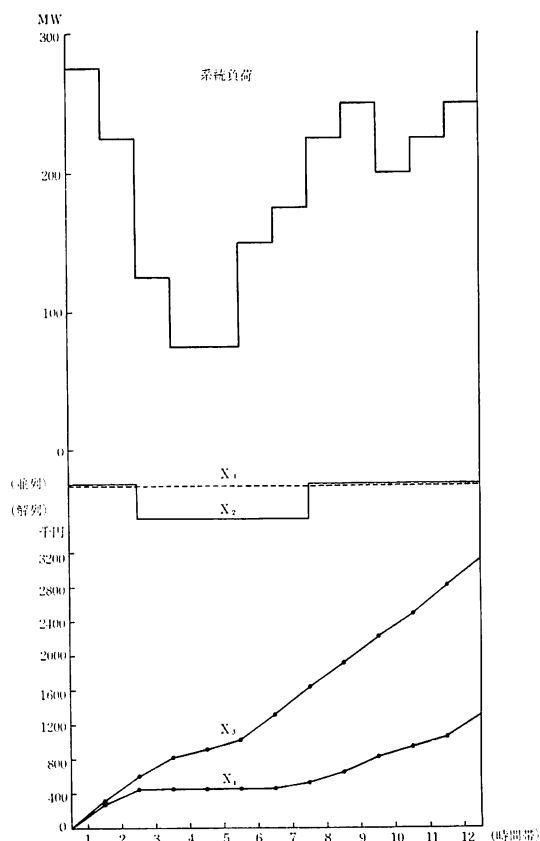
から、 $Z_1^0$  および  $Z_2^0$  の種々の値の各組合せについて、それぞれ最適運用を求め、それらの中から目的関数の値が最小になるものを見つけ出さねばならない。従って離散形最大原理では初期随伴変数の数が多くなれば、それだけ計算量が飛躍的に増加するので、初期随伴変数の組織的な修正法が見つかるかどうか、その有用性がかかっていると云える。

さて、既に述べたように、 $Z_1^n, Z_2^n$  は1号機、2号機の並・解列に対するウェイトと考えられるから、これらに大小関係を与えることは、いわば停止優先順位を与えることに等しい。従って、いま  $Z_1^n = Z_2^n$  とおけば、1号機と2号機の並列化に対するウェイトは等しくなるが、この時の随伴変数の大小は、並列すべきユニット台数の大小を指示することになる。即ち  $Z_1^n = Z_2^n$  の値が大きい時は、出来るだけ1, 2号機共に並列するような運用が得られるだろう。一方、 $Z_1^n = Z_2^n$  の値が小さい時は、1, 2号機ともに解列するような運用が得られる。

現実には、1, 2号機ともに解列する運用は不可能なので、ここではこの場合、1, 2号機のうち、どれか1台のみを並列させるような運用となる。



第 2 図 フローチャート



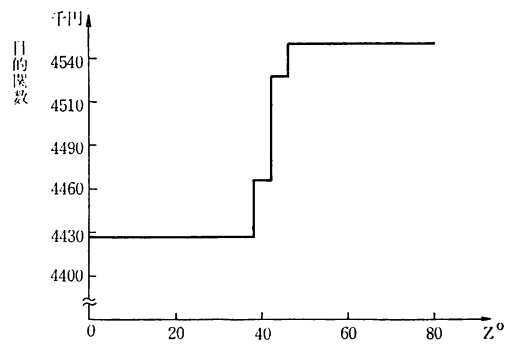
第 3 図 系統負荷と最適運動曲線

以上のような随伴変数の性質から、初期随伴変数の修正法としては、次の方法が考えられる。初期随伴変数の大小がウエイト付けに相当することから、系統を構成している火力発電機に停止優先順位が与えられていない状態では、全ての随伴変数の初期値を等しくしなければならないから、 $Z_1^0 = Z_2^0$  となる。

この場合、出発値  $Z_1^0$  に対する一つの最適運用が求まったら、次は  $\Delta Q$  だけ出発値から、離れた値について、(つまり出発値を  $\bar{Z}_1^0$  とすれば  $Z_1^0 = \bar{Z}_1^0 \pm \Delta Q$ ) 最適運用を求める。以下、同様にして  $Z_1^0 = \bar{Z}_1^0 \pm n\Delta Q$  の各初期値について最適運用を求め、その中から目的関数を最小にする初期値を見つけ出す。この様に、本来  $Z_1^0, Z_2^0$  の種々の値の組合せについて検討しなければならないものが、唯一個の随伴変数の初期値の決定問題に還元することができる。

なお、出発値  $\bar{Z}_1^0$  からの間隔  $\Delta Q$  および、繰り返し回数  $n$  は対象とする系に依存する。

第4図に2機系における随伴変数の初期値と目的関数の大きさを示す。



第 4 図 初期随伴変数と目的関数の値

以上述べてきた説明には状態変数に対する制約については無も触れていないが、実際には、ユニットの再起動に対してユニット固有の停止時間を必要とすること、また系統負荷と出力との需給条件を満足させるた

めには、ある時間帯の負荷に対して、並列可能なユニットに制約がある。このような諸制約を考慮した運用の場合は、制約のない場合と本質的には同じアルゴリズムに従うにしても、実際の計算はより複雑になることが予想される。

ここで、取り扱った例題では、停止時間に関する制約を考えない場合について解を求めた。

第3図に系統負荷と最適運用曲線を示す。また、計算に用いた火力ユニットの特性は第1表の通りである。なお同一モデルに対してダイナミック・プログラミングを適用したところ同じ結果を得た。計算に際しては、北大計算センターの NEAC 220 3G、および東北大学の大型計算機を使用した。計算時間は大型計算機で約 27 秒程である。付録 1 にプログラムを示す。

IV. 離散形最大原理と D, P の比較

周知のように、最大原理は D, P から誘導され両者は密接な関係にあるが、その探索の任方は全く異なる。即ち D, P は状態変数を格子点にとれば、各時間帯ごとに各格子点について最適運用を求めかつその結果を記憶させ、次の時間帯での運用を求める際に、この結果を利用する。これに対して離散形最大原理では各時間帯の格子点の 1 つを結ぶ最適運用曲線を求めるわけだから、電算機の記憶容量の点からは離散形最大原理は D, P より使用するコアメモリが少く有利であると言える。

しかし乍ら、離散形最大原理では前述した初期随伴変数の修正回数に比例した繰り返し計算になるので、計算時間の面からは、D, P との絶対的な比較は出来ない。また状態変数に対する制約については、D, P では、かえって計算時間を短縮させるが、離散形最大原理では計算がより複雑になるという欠点を持っている。従って両者を比較した場合、どちらか一方が優れているということはできず、対象とする系の特性に応じて、いずれかの手法を採用することになる。

表1 火力ユニット特性

| ユニット号 | $a$   | $b$   | $c$     | $h$ | 出力 (MW) |
|-------|-------|-------|---------|-----|---------|
| 1     | 6.9   | 0.648 | 0.00105 | 5.2 | 175~50  |
| 2     | 11.74 | 1.189 | 0.0011  | 3.2 | 125~40  |

燃料費特性  $F = a + b \cdot G + c \cdot G^2$        $G$  : 出力  
起動費特性  $FS = h \cdot t$                        $t$  : 停止時間

## V. 結 言

火力発電機群の起動停止問題に離散形最大原理を適用し、その定式化を試みると同時に簡単なモデル系統について数値計算を行い、この手法を起動停止問題へ適用することの妥当性を示した。また随伴変数の持つ物理的の意味を明らかにし、かつ初期随伴変数の効果

的な修正法を示した。なお、ユニットの起動に要する停止時間、需給条件満足等の状態変数への諸制約を考慮する場合には、別途対策が必要となるが、この点については稿を新たにしたい。終りに、日頃御指導いただっている北大工学部の小池東一郎教授、および助教授の宮本衛市氏にお礼申し上げる次第です。

### ※付録 I プログラム

NMOD4 \* F392 ORTRAN L : 012 DATE : 08/26/69  
SEQ# LABEL FORTRAN STATEMENT

PROGRAM : MAINPG  
SUBPROG-REV :

```

UNIT COMMITMENT (MAXIMUM PRINCIPLE)
0001      0  DIMENSION Z1 (13), Z2 (13), JX (13), P (13), FS1 (13), FS2 (13), X1, (13),
           X2 (13), X3 (13), X4 (13), FC1 (13), FC2 (13), GMAX (3), GMIN (3), H (13,3)
0002      READ (5,8) NM, JM, GMAX, GMIN, S1, S2
0003      8  FORMAT (2I3,6F4.0,2F4,1)
0004      READ (5,9) P
0005      9  FORMAT (13F4.0)
0006      JB = 0
0007      Z1 (1) = -300.
0008      Z2 (1) = -300.
0009      JX (1) = 3
0010      JX (2) = 3
0011      DO 1000 N=2, NM
0012      PR=P (N)
0013      IF (N-2) 6,7,6
0014      7  CALL SUB (PR, JM, F1, F2, JB)
0015      FS1 (N)=0.
0016      FS (N)=1.
0017      X1 (N)=1.
0018      X2 (N)=1.
0019      X3 (N)=F1
0020      X4 (N)=F1
0021      FC1 (N)=F1
0022      FC2 (N)=F2
0023      Z1 (N)=Z1 (1) +FC1 (N)-S1
0024      Z2 (N)=Z2 (1)+FC2 (N)-S2
0025      ZH=Z1 (N)+Z2 (N)-F1-F2
0026      H (N, JM)=ZH
0027      GO TO 1000
0028      6  HM=-1.E10
0029      N1=N-1
0030      DO 900 J=1, JM
0031      IF (GMIN (J)-PR) 65,65,70
0032      65 IF (GMAX (J)-PR) 70,66,66
0033      66 GO TO (11,12,13), J
0034      11 FS1 (N)=0.
0035      FS2 (N)=S2
0036      X1 (N)=1.

```

```

0037      X2(N)=0.
0038      FC2(N)=0.
0039      GO TO 60
0040  12    FS1(N)=S1
0041      FS2(N)=0.
0042      X1(N)=0.
0043      X2(N)=1.
0044      FC1(N)=0.
0045      GO TO 60
0046  13    FS1(N)=0.
0047      FS2(N)=0.
0048      X1(N)=1.
0049      X2(N)=1.
0050      GO TO 60
0051  70    H(N,J)=-1.E20
0052      GO TO 800
0053  60    CALL SUB(PR,J,F1,F2,JB)
0054      FC1(N)=F1
0055      FC2(N)=F2
0056      X3(N)=X3(N1)+FC1(N)+FS1(N)
0057      X4(N)=X4(N1)+FC2(N)+FS2(N)
0058      Z1(N)=Z1(N1)+FC1(N)-S1
0059      Z2(N)=Z2(N1)+FC2(N)-S2
0060      ZH=Z1(N)*X1(N)+Z2(N)*X2(N)-X3(N)-X(N)
0061      H(N,J)=ZH
0062  800    IF(H(N,J)-HM)
0063  100    HM=H(N,J)
0064      J0=J
0065      Z10=Z1(N)
0066      Z20=Z2(N)
0067      FC10=FC1(N)
0068      FC20=FC2(N)
0069      FS10=FS1(N)
0070      FS20=FS2(N)
0071      X10=X1(N)
0072      X20=X2(N)
0073      X30=X3(N)
0074      X40=X4(N)
0075  900    CONTINUE
0076      X3(N)=X30
0077      X4(N)=X40
0078      Z1(N)=Z10
0079      Z2(N)=Z20
0080      JX(N)=J0
0081      WRITE(6,910)
0082  910    FORMAT(1H1,2X,1HN,7X,2HHN,7X,2HZ1,7X,2HZ2,6H,X1,X2,,7X,2HX3,
17X,2HX4,7X,2HF1,5X,10HF2,FS1,FS2)
0083      WRITE(6,920)N,HM,Z10,Z20,X10,X20,X30,X40,FC10,FC20,FS10,FS20
0084  920    FORMAT(13,3E9.3,2F3.0,4E9.3,2F4.1)
0085  1000   CONTINUE

```

```

0086      WRITE(6,1100) JX
0087 1100  FORMAT(1315)
0088      STOP
0089      END
0001      SUBROUTINE SUB(PR,J,F1,F2,JB)
0002      DIMENSION A(2),B(2),C(2),D(2),GMAX(2),GMIN(2),ALF(2),
          IG(2),ID(2),FF(2),NZ(2),N3(2)
0003      IF(JB),10,20,10
0004 20     READ(5,8) N3,N1,N2
0005 8      FORMAT(412)
0006      READ(5,9) A,B,C,GMAX,GMIN
0007 9      FORMAT(2F6.2,2F7.3,2F8.5,4F4.0)
0008      JB=1
0009 10     GO TO (21,22,23),J
0010 21     K=1
0011      NZ(1)=N1
0012      GO TO 40
0013 22     K=1
0014      NZ(1)=N2
0015      GO TO 40
0016 23     K=2
0017      DO 33 N=1,K
0018      NZ(N)=N3(N)
0019 33     CONTINUE
0020 40     PL=PR
0021      DO 50 N=1,2
0022      ALF(N)=0.
0023 50     CONTINUE
0024 51     CA=0.
0025      BC=0.
0026      DO 52 N=1,2
0027      D(N)=0.
0028 52     CONTINUE
0029      DO 53 N=1,K
0030      NB=NZ(N)
0031      IF(ALF(NB)) 53,55,53
0032 55     CA=CA+1./C(NB)
0033      BC=BC+B(NB)/C(NB)
0034 53     CONTINUE
0035      BETA=0.
0036      DO 100 N=1,K
0037      NB=NZ(N)
0038      IF(ALF(NB)) 100,60,100
0039 60     G(NB)=(BC+2.*PL)/2.*C(NB)*CA-B(NB)/(2.*C(NB))
0040      IF(GMAX(NB)-G(NB)) 80,70,70
0041 70     IF(G(NB)-GMIN(NB)) 90,100,100
0042 80     D(NB)=G(NB)-GMAX(NB)
0043      GO TO 99
0044 90     D(NB)=ABS(G(NB)-GMIN(NB))
0045 99     BETA=1.

```



```
0046 100 CONTINUE
0047      IF (BETA) 111,1000,111
0048 111 DO 115 N=1,2
0049      ID(N)=0.
0050 115 CONTINUE
0051      PA=PL
0052 110 AL=0.
0053      DO 120 N=1,K
0054      NB=NZ(N)
0055      IF (ID(NB)-1) 122,120,122
0056 122 IF (D(NB)-AL) 120,120,130
0057 130 AL=D(NB)
0058      M=NB
0059 120 CONTINUE
0060      IF (G(M)-GMAX(M)) 160,150,150
0061 160 G(M)=GMIN(M)
0062      GO TO 170
0063 150 G(M)=GMAX(M)
0064 170 ALF(M)=1.
0065      PL=PA-G(M)
0066      PM=0.
0067      PP=0.
0068      DO 200 N=1,K
0069      NB=NZ(N)
0070      IF (ALF(NB)-1.) 210,200,210
0071      PM=PM+GMIN(NB)
0072 210 PP=PP+GMAX(NB)
0073 200 CONTINUE
0074      IF (PP-PL) 230,220,220
0075 220 IF (PL-PM) 230,51,51
0076 230 ALF(M)=0.
0077      ID(M)=1
0078      GO TO 110
0079 1000 F2=0.
0080      F1=0.
0081      DO 500 N=1,K
0082      NB=NZ(N)
0083      FF(NB)=A(NB)+B(NB)*G(NB)+C(NB)*G(NB)* * 2
0084 500 CONTINUE
0085      DO 510 N=1,K
0086      NB=NZ(N)
0087      IF (NB-1) 520,530,520
0088 530 F=FF(NB)
0089      GO TO 510
0090 520 IF (NB-2) 510,540,510
0091 540 F2=FF(NB)
0092 540 CONTINUE
0093 510 RETURN
0094      END
```

## \* 付録 II 離散最大原理のアルゴリズムの誘導

状態変数  $\bar{X}^n$  を最適制御変数  $\bar{\theta}^n$  により得られる最適状態変数とする。即ち

$$\bar{X}^n = T^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n) \quad n=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

次に  $\bar{\theta}^n$  からの微少変動を  $\varepsilon\phi^n$  とすれば  $n$  段における制御変数は

$$\theta^n = \bar{\theta}^n + \varepsilon\phi^n \quad (2)$$

(2) 式の変動に応じて, (1) 式の状態変数は

$$X^n = X^{n-1} + \varepsilon y^n + O(\varepsilon^2) \quad (3)$$

ここで  $\varepsilon$  は一次の微少量,  $O(\varepsilon^2)$  はより高次の微少量を示す。また  $\phi^n$  および  $y^n$  は各々  $\varepsilon$  と独立の関係にある。

$X^n = T^n(X^{n-1}, \theta^n)$  であるから (1), (2), (3) 式を組合せ, 得られた式を  $\varepsilon y$  について展開すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \varepsilon y_i^n = \sum_{j=1}^S \varepsilon y_i^{n-1} \frac{\partial T_i^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n)}{\partial X_j^{n-1}} + T_i^n(X^{n-1}, \theta^n) - T_i^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n) + O(\varepsilon^2) \\ i = 1, 2, \dots, S \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式に  $z_i^n$  を乗じ, さらに  $n = 1$  から  $n = N$  まで,  $i = 1$  から  $i = S$  までの総和を求めれば

$$\varepsilon \sum_{i=1}^S y_i^N z_i^N = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^S z_i^n [T_i^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n) - T_i^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n)] + \varepsilon \sum_{i=1}^S y_i^0 z_i^0 + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

さて状態変数の最適状態からの変動は目的関数を  $\phi(\bar{X}^N)$  から  $\phi(X^N)$  へ変るから,  $\phi(X^N)$  を  $\varepsilon y^N$  のべき級数で展開して

$$\phi(X^N) - \phi(\bar{X}^N) = \varepsilon \sum_{i=1}^S y_i^N \frac{\partial \phi(\bar{X}^N)}{\partial X_i^N} + O(\varepsilon^2) \quad (6)$$

最適制御変数  $\theta^n$  は目的関数  $\phi(X^N)$  を最大にするから

$$[\phi(X^N) - \phi(\bar{X}^N)] \leq 0 \quad (7)$$

ここで

$$z_i^N = \frac{\partial \phi(X^N)}{\partial X_i^N} \quad (8)$$

とおけば, (5), (6), (7) 式から,

$$\left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^S (\varepsilon \phi_j^n) \sum_{i=1}^S z_i^n \frac{\partial T_i^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n)}{\partial \theta_j^n} + \varepsilon \sum_{i=1}^S y_i^0 z_i^0 + O(\varepsilon^2) \right\} \leq 0 \quad (9)$$

(9) 式はまた,  $\theta^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  は互に独立だから

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^S (\theta_j^n - \bar{\theta}_j^n) \sum_{i=1}^S z_i^n \frac{\partial T_i^n(\bar{X}^{n-1}, \bar{\theta}^n)}{\partial \theta_j^n} \leq 0 \quad n = 1, 2, \dots, N \\ y_i^0 z_i^0 \leq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

と書くことが出来る。

なお, 状態変数の初期値  $X^0$  が確定している場合はフィードバックが無い限り  $y_i^0 = 0$  となる。

## 参 考 文 献

- |                                                     |                                 |
|-----------------------------------------------------|---------------------------------|
| 1) 山城: “苫高専紀要” 昭和43年3月                              | mal process”.                   |
| 2) Fan, 他: “The discrete maximum principle”, Wiley. | 4) 呉: “電学誌” 昭和42年—38            |
| 3) Pontragin: “The mathematical theory of opti-     | 5) 山城: “電学会北海道支部大会予稿集” 昭和44年10月 |

(昭和44年12月4日受理)