

# 最大原理による電力系統の経済運用計画について

山 城 迪\*  
菅 井 雅 周\*\*

The Economic Operation Schedule of Electric  
Power System by the Maximum Principle

(Department of Electrical Engineering)

Susumu YAMASHIRO  
Masahiro SUGAI

## 要 旨

本稿は揚水式水力発電所を含む電力系統の経済運用計画を離散形最大原理を用いて求めようとするもので、比較的簡単なモデル系統を対象に問題の定式化と数値計算を行なった。

## Synopsis

In this paper, authors intend to apply the discrete maximum principle for the economic operation schedule of electric power system which includes pumped storage power station, and we tried mathematical formulation and numerical calculation for the simple model system.

## I 緒 言

電力系統の経済運用計算法には、Dynamic programming, gradient method などが知られているが、最大原理についてはこれらの手法ほど広く知られていない。

最大原理を用いる際に最も困難を感じる点は、問題が初期随伴変数と最終段における状態変数に関する二点境界値問題となること、そこで境界条件を満足せしめる初期随伴変数の決定に組織だった方法がなく、試行錯誤的に求めなければならないことである。

従って、一般に状態変数の数の増加にともない計算量が飛躍的に増大する。

しかしながら、数値計算を行なう際に、例えば Dynamic programming 法では発電所の数の増加にともない、計算量の増加はもとより、所要コアメモリの数が幾可級数的に増え、適用可能な系統規模の大きさに限度があるが、その点最大原理では、この制約はずつとゆるく、DP に比べて有利である。

さて、近年の系統は電力需要の増加にともない大容量火力、原子力、および大容量揚水式水力等の発電設備の増設が相次ぎ、この状況は当分続くものと予想される。こうした系統構成の中で揚水式水力が水系の他の発電設備と本質的に異なる点は、常時電力を供給するのではなく、必ず揚水すること、つまり他の発電設備からみれば負荷となることであり、それ故に、運用期間のどこかで、どれだけの水を使うべきか、また揚水すべきかを決定することは系統運用上重要な問題となる。

この揚水式水力の運用は火力ユニット群の起動停止とも密接な関係があり、増え複雑化してゆく、電力系統の経済運用を決める際、両者の関連を考慮した運用法が要求される。

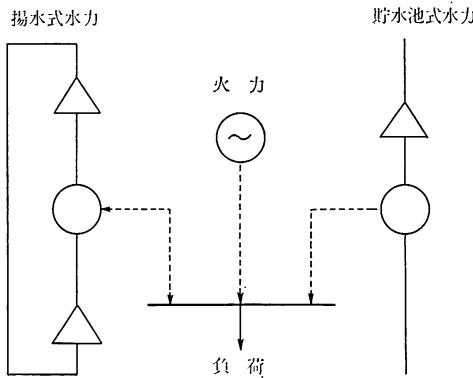
本稿は揚水式水力を含めた水・火力系統の日間経済運用計画へ最大原理を適用する一段階として簡単なモデル系統を対象に問題の解析を試みたものである。

## II 縮散形最大原理による問題の定式化

第1図に示すモデル系統を対象に定式化を進めるが、この系統の構成要素には次の制約条件が与えられているものとする。

\* 助教授 電気工学科

\*\* 助手 電気工学科



第1図 モデル系統

(1) 運用期間(日間)中の貯水池式水力の使用水量( $\theta_1^n$ )はあらかじめ与えられていること。

$$\sum_{n=1}^N \theta_1^n = V \quad (1)$$

たゞし、 $V$ : 定数、 $n$ : 時間帯

(2) 日間の揚水式水力の使用水量( $\theta_2^n$ ) および揚水量は等しいこと。

$$\sum_{n=1}^N \theta_2^n = \sum_{n=1}^N \theta_3^n \quad (2)$$

(3) 使用水量( $\theta_1^n, \theta_2^n$ )、揚水量( $\theta_3^n$ )は次式を満足すること。

$$\underline{\theta}_1 \leq \theta_1^n \leq \bar{\theta}_1, \underline{\theta}_2 \leq \theta_2^n \leq \bar{\theta}_2, \underline{\theta}_3 \leq \theta_3^n \leq \bar{\theta}_3 \quad (3)$$

(4) 運用期間中、電力需給平衡条件を満足すること。

$$PR^n = G^n - (W^n + PG^n) - PP^n \quad (4)$$

たゞし  $PR$ : 負荷、 $G$ : 火力出力、 $PG$ : 揚水式水力出力、 $W$ : 貯水池式水力出力、 $PP$ : 揚水式水力入力。

(5) 火力出力( $G^n$ )は次式を満足すること。

$$\underline{G} \leq G^n \leq \bar{G} \quad (5)$$

また、簡単のために系統の送電損失は考えないものとする。以上(1)～(5)式の制約条件のもとで、日間の火力燃料費を最小にする系統運用を求めることが問題となる。

この問題に離散形最大原理を適用するために、まず状態変数として

(1) 貯水池式水力の累積使用水量:  $X_1^n$

(2) 揚水式水力の " " :  $X_2^n$

(3) " " 累積揚水量:  $X_3^n$

(=) 火力の累積燃料費 :  $X_4^n$

を取れば、運用期間中の第  $n$  時間帯と第  $n-1$  時間帯における状態変数の関係は

$$X_1^n = X_1^{n-1} + \theta_1^n \quad (6)$$

$$X_2^n = X_2^{n-1} + \theta_2^n \quad (7)$$

$$X_3^n = X_3^{n-1} + \theta_3^n \quad (8)$$

$$X_4^n = X_4^{n-1} + F^n(G^n) \quad (9)$$

こゝで  $F^n$  は燃料費を示す。

で表わされる。

目的関数( $\phi$ )は最終時間帯( $N$ )までの累積燃料費であるから(9)式より

$$\phi = X_4^N \quad (10)$$

となる。

一方、(6)～(9)式の状態変数に対応する随伴変数は次式によって与えられる。

$$Z_i^{n-1} = \partial H^n / \partial X_i^{n-1} \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (11)$$

こゝで、ハミルトン関数  $H^n$  は

$$H^n = Z_1^n(X_1^{n-1} + \theta_1^n) + Z_2^n(X_2^{n-1} + \theta_2^n) + Z_3^n(X_3^{n-1} + \theta_3^n) + Z_4^n(X_4^{n-1} + F^n(G^n)) \quad (12)$$

(11)式と(12)式とから

$$Z_i^{n-1} = Z_i^n \quad (13)$$

ところで、(10)式から、目的関数は  $X_4^n$  であり、かつ  $X_4^N$  の終端値は未定だから

$$Z_4^N = \partial \phi / \partial X_4^N = 1 \quad (14)$$

となり、従って  $Z_4^n = 1$  となる。

また、(10)式を  $\phi = -X_4^N$  として、 $\phi$  の最大化を目的としても同様な結果が得られるはずだから、 $Z_4^n = -1$  として(12)式のハミルトン関数を最大にすることを考える。

ところで(12)式のハミルトン関数を最大にするための条件は、4個の制御変数  $\theta_1^n, \theta_2^n, \theta_3^n, G^n$  の各々で  $H^n$  を偏微分し零と置いて得られる連立方程式から求めることができる。

たゞし、制約条件式(4)から知られるように  $\theta_1^n, \theta_2^n, \theta_3^n, G^n$  のうち、いずれか3個が定まれば残りの1個は必然的に(4)式から求まるから、独立変数は3個とし取り扱うことができる。いま、(12)式にラグランジュ乗数  $\lambda^n$  を用いて(4)式の制約条件を導入すれば

$$H^{n'} = H^n - \lambda^n (PR^n - W^n - PG^n - G^n + PP^n) \quad (15)$$

故に

$$\frac{\partial H^{n'}}{\partial \theta_1^n} = Z_1^n + \lambda^n \frac{\partial W^n}{\partial \theta_1^n} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial H^{n'}}{\partial \theta_2^n} = Z_2^n + \lambda^n \frac{\partial PG^n}{\partial \theta_2^n} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial H^{n'}}{\partial \theta_3^n} = Z_3^n - \lambda^n \frac{\partial PP^n}{\partial \theta_3^n} = 0 \quad (18)$$

$$\therefore \lambda^n = -\frac{Z_1^n}{\partial W^n / \partial \theta_1^n} = -\frac{Z_2^n}{\partial PG^n / \partial \theta_2^n}$$

$$= -\frac{Z_3^n}{\partial PP^n / \partial \theta_3^n} \quad (19)$$

ここで、貯水池式水力、揚水式水力の落差を一定とすれば、

$$W^n = C_1 H_1 \theta_1^n \quad (20)$$

$$PG^n = C_2 H_2 \theta_2^n \quad (21)$$

$$PP^n = C_3 H_3 \theta_3^n \quad (22)$$

たゞし  $C_1, C_2, C_3$  は定数

故に(19)式は、

$$\lambda^n = -\frac{Z_1^n}{C_1 H_1} = -\frac{Z_2^n}{C_2 H_2} = -\frac{Z_3^n}{C_3 H_3} \quad (23)$$

のことから、水系の落差を一定とすれば、3個の随伴変数を求める問題が唯1個の随伴変数の決定問題となり計算は非常に簡略化されることがわかる。

最後に、状態変数  $X_1, X_2, X_3$  の境界条件は先に述べた(1), (2)式から

$$X_1^n = V \quad V, V' \text{ は定数} \quad (24)$$

$$X_2^n = X_3^n = V'$$

となる。

以上、述べたことを要約すると、送電損失を考えず、水系の落差を一定とし、かつ貯水池容量を充分大きいものと仮定すれば、問題は(3)～(5)式の制約条件のもとで、(23)式で関係づけられる随伴変数により、ハミルトニヤンを最大にする制御変数  $\theta_1^n, \theta_2^n, \theta_3^n, G^n$  を見出すこと、かつ、境界条件(24)式を満足せしめる初期随伴変数を見つけることである。

### III 試 算 例

第1表に、第1図のモデル系統を構成する各要素の特性を示す。第2図は計算の手順を示すフローチャートである。また第3図、および第2表に計算結果を示す。

計算には北海道大学大型計算センター、および京都大学大型計算センターの FACOM 230-60 を使用した。

また、初期随伴変数の修正は2進分割法により行ない、繰り返し1回ごとの計算には、3.5秒を要した。第3図で、マイナスの出力は揚水式水力発電所が揚水していることを示しており、ベース負荷で揚水し、ピーク負荷で発電を行なう、通常の揚水運用と一致した結果が得られた。

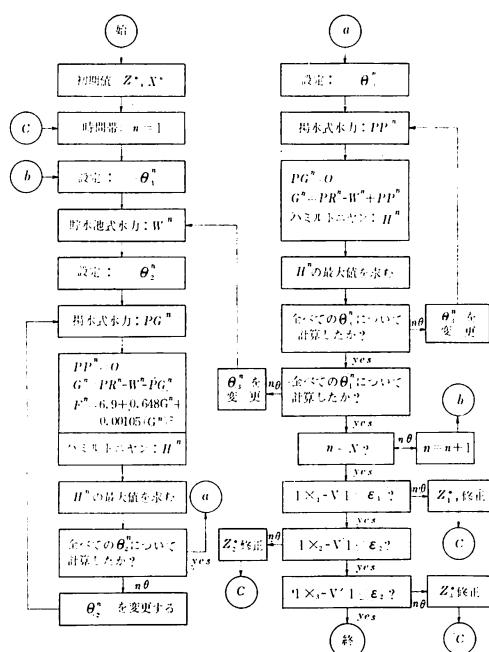
第1表 モデル系統諸元

貯水池式水力			揚水式水力		
定 数	記 号	数 値	定 数	記 号	数 値
有効落差	$H_1$	120(m)	有効落差	$H_2, H_3$	220(m)
最大使用水量	$\bar{\theta}_1$	73( $m^3/s$ )	最大使用水量	$\bar{\theta}_2$	27( $m^3/s$ )
最小使用水量	$\underline{\theta}_1$	( $3m^3/s$ )	最小使用水量	$\underline{\theta}_2$	0
無効〃	$\theta_0$	〃	最大出力	$\bar{P}G$	75(MW)
最大出力	$\bar{W}$	75( $m^3/s$ )	最大揚水量	$\bar{\theta}_3$	19( $m^3/s$ )
効率	$\eta$	92(%)	最小〃	$\underline{\theta}_3$	0
流入入量	$J_1$	60( $m^3/s$ )	最大入力	$\bar{P}P$	50(MW)
火力			揚水効率	$\eta_P$	81(%)
最大出力	$\bar{G}$	175(MW)	発電効率	$\eta_G$	85(%)
最小出力	$\underline{G}$	50(MW)	流入入量	$J_2$	0
燃料費	$F = 6.9 + 0.648G + 0.00105G^2$				

第2表 計 算 結 果

N	$\theta_1$ (m <sup>3</sup> /s)	$\theta_2$ (m <sup>3</sup> /s)	$\theta_3$ (m <sup>3</sup> /s)	GGO (MW)	PO (MW)	PGO (MW)	PPO (MW)	PR (MW)	X <sub>1</sub> (m <sup>3</sup> /s)	X <sub>2</sub> (m <sup>3</sup> /s)	X <sub>3</sub> (m <sup>3</sup> /s)	X <sub>4</sub>	FFO	HMAX
1	73	27	0	175	76	49	0	300	73	27	0	304.6	304.6	- 544.2
2	73	15	0	147	76	27	0	250	146	42	0	554.1	249.4	- 991.2
3	69	0	19	130	71	0	51	150	215	42	19	771.8	217.7	- 1251.0
4	73	0	19	101	76	0	51	125	288	42	38	937.3	165.5	- 1462.7
5	73	0	19	101	76	0	51	125	361	42	57	1102.8	165.5	- 1678.2
6	73	0	15	140	76	0	41	175	434	42	72	1339.2	236.4	- 1988.7
7	45	0	0	130	45	0	0	175	479	42	72	1556.3	217.0	- 2295.2
8	73	15	0	147	76	27	0	250	552	57	72	1805.7	249.4	- 2742.1
9	73	27	0	150	76	49	0	275	625	84	72	2060.9	255.2	- 3236.9
10	73	0	15	140	76	0	41	175	698	84	87	2297.3	236.4	- 3543.4
11	73	0	15	140	76	0	41	175	771	84	102	2533.7	236.4	- 3849.9
12	73	27	0	150	76	49	0	275	844	111	102	2788.9	255.2	- 4344.6

注: N(時間帯),  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  (貯水池式水力使用水量, 揚水式水力使用水量, および揚水量), GGO(火力出力), PO(貯水池出力), PG(揚水出力), PP(揚水入力), PR(負荷), FFO(燃料費), HMAX(ハミルトンヤン)。

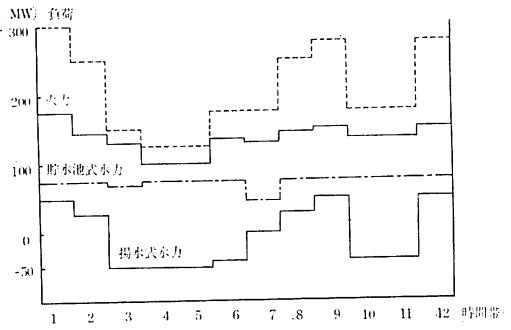


第2図 フロー・チャート

#### IV ダイナミックプログラミングによる方法

同じ問題に対して, D.P. を適用すると次の様に定式化することができる。

いま, 貯水池水力の貯水量を  $V^n$ , 使用水量を  $Q^n$  とすれば



第3図 負荷曲線と最適運用曲線

$$V^{n+1} = V^n - Q^n + J^n \quad (25)$$

ここで,  $J^n$  は  $n$  時間帯における流入量有効落差を一定とすれば, 出力  $P^n$  は

$$P^n = C_1 H_1 Q^n \quad (26)$$

一方, 揚水式水力の上部貯水池, 下部貯水池の貯水量を  $W_1^n$ ,  $W_2^n$  とすれば,

$$W_1^{n+1} = W_1^n - QQ_1^n + QQ_2^n \quad (27)$$

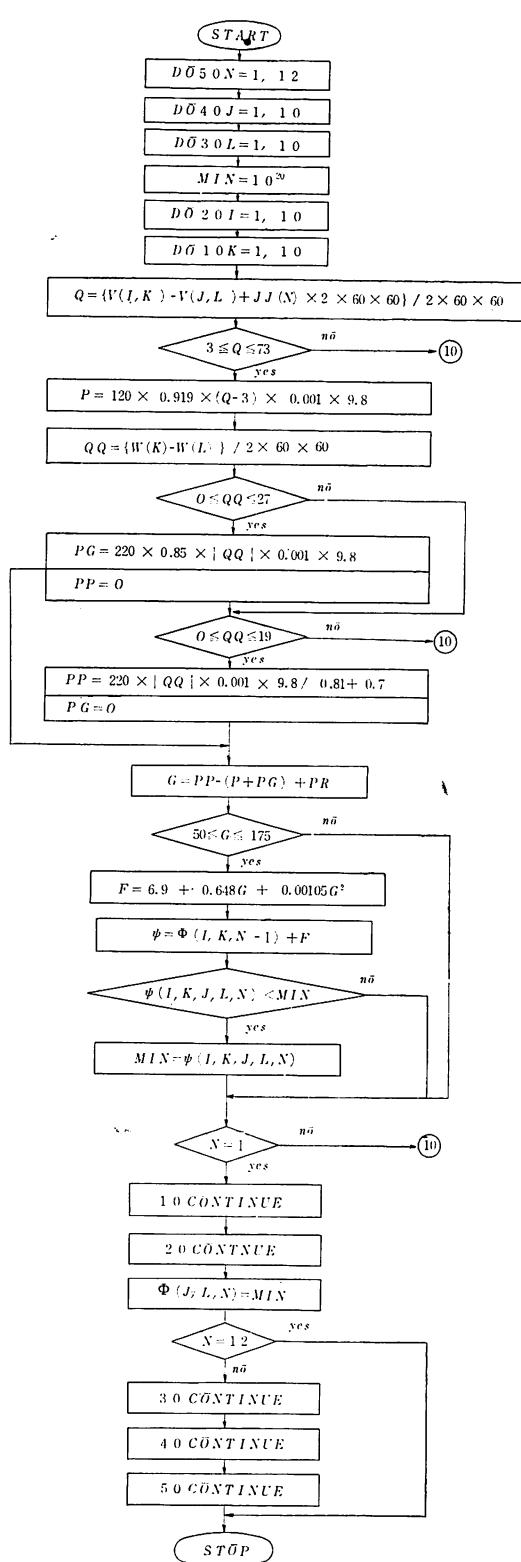
$$W_2^{n+1} = W_2^n + QQ_1^n - QQ_2^n \quad (28)$$

ここで,  $QQ_1^n$  は使用水量,  $QQ_2^n$  は揚水量を示す。有効落差を一定と仮定すれば, 揚水の入・出力は

$$PG^n = C_2 H_2 QQ_1^n \quad (29)$$

$$PP^n = C_3 H_3 QQ_2^n \quad (30)$$

また,  $P^n$ ,  $PG^n$ ,  $PP^n$ , 火力出力  $G^n$  と負荷  $PR^n$



の関係は、

$$PR^n = G^n - P^n - (PG^n - PP^n) \quad (31)$$

(31) 式から求まる  $G^n$  により燃料費  $F^n$  は

$$F^n = F^n(G^n) \quad (32)$$

従って、第  $n$  時間帯までの燃料費  $\phi^n$  は

$$\phi(V^n, W^n, Q^n, QQ^n)$$

$$= F^n(G^n) + \Phi^{n-1}(V^{n-1}, W^{n-1}) \quad (33)$$

たゞし

$$\Phi^n(V^n, W^n) = \min\{\phi(V^n, W^n, Q^n, QQ^n)\}$$

$$(Q^n, QQ^n) \quad (34)$$

$$\Phi^0 = O$$

$$V^n, W = \text{指定値} \quad (35)$$

(33) 式の漸化式に従って、第 1 時間帯から、最終時間帯までの計算を進めていけば解が求まる。第 4 図にフロー チャートを示す。

## VI 結 言

電力系統の経済運用計画への最大原理適用の第 1 段階として簡単なモデル系統への適用を試みた。その結果、水系の落差を一定とした場合には、修正すべき初期隨伴変数の数が発電要素の増加関係なく唯一個となり計算が簡略化されることがわかった。また、計算プログラムを求めた。(附録参照)

今後、これをもとに、一般的な系統への適用を試みる予定である。

## 参 考 文 献

- 1) 吳 電学誌 Vol. 87-4 No. 943
- 2) 山城 電学会北海道支部大会、昭45年 81
- 3) E.B.Dahlin, IEEE, 1966, May.

(昭和46年1月11日受付)

第4図

## 附録：最大原理によるプログラム

```

C      OPTIMAL OF HYDRO-THERMAL POWER SYSTEM          10
C      DISCRETE MAXIMUM PRINCEPLE METHOD 1970.11.15(S. YAMASHIRO) 20
1      DIMENSSION X(4,13), F(13), PR(13), V(3), E(3), DIF(3), Z(3), DELZ(3), DELZI 30
1      N(3), DIFO(3)                                40
2      DATA A, B, C, GMAX, GMIN/6.9, 0.648, 0.00105, 175.0, 50.0/, HEAD1, ETAP, HEAD2
1 2, ETA1, ETAG, PO, OMIN/120.0, 0.81, 220.0, 0.919, 0.85, 0.73, 3.0/
3      DATA V, E, PR/840.0, 2 * 110.0, 20.0, 2 * 10.0, 0.0, 300.0, 250.0, 125.0,
1, 125.0, 2 * 175.0, 250.0, 275.0, 2 * 175.0, 275.0/, DIFO, DELZ, DELZIN/3 * 0.0, 6
1      2 * 0.01/
4      Z(1)=-1.9892455                            100
5      Z(2)=-3.5                                  110
6      Z(3)=5.0                                 120
7      LC=1                                    130
8      CONTINUE
9      DATA (X(I,1), I=1, 4)/4 * 0.0/
10     WRITE(6, 1001) LC, Z, DELZ                150
11    100 1 FORMAT(1HO, 5X, 3HLC=, 13, 5H Z1=, F12.7, 5H Z2=F12.7, 5H Z3=, F12.7, 8H
2      2 DELZ1=, F12.7, 8H DELZ2=, F12.7, 8H DELZ3=, F12.7/1HO, 7X, 1HN, 7H        160
3      3 O1, 7H   O2, 7H   O3, 7H   GGO, 7H   PO, 7H   PGO, 7H   PPO, 7H           170
4      4 PR, 7H   X1, 7H   X2, 7H   X3, 13X, 2HX4, 12X, 3HFFO, 11X, 4HHMA         180
5      5 X)
12      DO 1000 N=2, 13                           200
13      HMAX=-1.E30                             210
14      DO 900 J1=3, 73, 2                      220
15      PO=9.8 * ETA1 * HEAD1 * (J1-OMIN) * 0.001 230
16      PPP=0.0                                240
17      J3=0                                    250
18      DO 800 J2=1, 28                         260
19      PGG=9.8 * ETAG * HEAD2 * (J2-1)-0,001 270
20      GG=PR(N)-PO-PGG                        280
21      IF(GG.GT.GMAX.OR.GG.LT.GMIN) GO TO 800 290
22      FF=(A+B*GG+C*GG ** 2)*2.                 300
23      X1=X(1, N-1)+J1                         310
24      X2=X(2, N-1)+J2-1                      320
25      X3=X(3, N-1)+J3                         330
26      X4=X(4, N-1)+FF                         340
27      HH=X1 * Z(1)+X2 * Z(2)+X3 * Z(3)-X4 350
28      IF(HH.LE.HMAX) GO TO 800               360
29      HMAX=HH                                370
30      O1=J                                    380
31      O2=J2-1                               390
32      O3=J3                                 400
33      GGO=GG                                410
34      FFO=FF                                420
35      PGO=PGG                               430
36      PPO=PPP                               440
37      PO=PQ                                 450
38      800 CONTINUE                           460
39      PGG=O,                                470
                                         480

```

---

40	J2=O.	490
41	DO 700 J3=2, 20	500
42	Q3=J3-1	501
43	PPP=9.8 * HEAD2 * Q * 0.001/ETAP+ PO	520
44	GG=PR(N)+PPP-PQ	
45	IF(GG, GT, GMAX, OR, GG, LT, GMIN) GO TO 700	540
46	FF=(A+B*GG+C*GG**2)*2.	550
47	X2=X(2,N-1)+J2	560
48	X3=X(3, N-1)+Q3	570
49	X4=X(4, N-1)+FF	580
50	HH=X1*Z(1)+X2*Z(2)+X3*Z(3)-X4	590
51	IF(HH, LE, HMAX) GO TO 700	600
52	HMAX=HH	610
53	O1=J1	620
54	O2=J2	630
55	O3=Q3	640
56	GGO=GG	650
57	PGO=PGG	
58	PPO=PPP	660
59	FFO=FF	670
60	PO=PQ	680
61	700 CONTINUE	690
62	900 CONTINUE	700
63	X(1, N)=X(1, N-1)+O1	710
64	X(2, N)=X(2, N-1)+O2	720
65	X(3, N)=X(3, N-1)+O3	730
66	X(4, N)=X(4, N-1)+FFO	740
67	WRITE(6, 1100) N,O1,O2,O3, GGO, PO, PGO, PPO, PR(N), (X(I, N), I=1, 4), FFO, H	750
1	MAX	760
68	1100 FORMAT(6X, I3, 11F. 0, 3F15. 6)	770
69	1000 CONTINUE	780
70	LC=LC+1	790
71	DO 100 I=1, 3	800
72	DIIF(I)=X(I, 13)-V(I)	310
73	IF(ABS(DIF(I)).LT. E(I)) GO TO 150	820
74	M=1	830
75	GO TO 200	340
76	150 DELZ(I)=DELZN(I)	850
77	100 CONTINUE	860
78	GO TO 500	870
79	200 IF(DIFO(M)* DIF(M)) 250, 260, 260	880
80	250 DELZ(M)=DELZ(M)/2.0	890
81	260 DIFO(M)=DIF(M)	900
82	IF(DIF(M)) 300, 400, 400	910
83	300 Z(M)=Z(M)+DELZ(M)	920
84	GO TO 8	930
85	400 Z(M)=Z(M)=DELZ(M)	940
86	GO TO 8	950
87	500 STOP	960
88	END	970

the crown's influence on the state. In this section, we will focus on the relationship between the crown and the executive branch. We will also examine the relationship between the crown and the legislative branch. Finally, we will look at the relationship between the crown and the judiciary.

The crown's influence on the executive branch is perhaps the most well-known aspect of its role. The crown appoints the prime minister and other members of the cabinet. It also has the power to dismiss the prime minister and other ministers. The crown also has the power to grant royal assent to bills passed by the legislature.

The crown's influence on the legislative branch is also significant. The crown has the power to summon and prorogue the legislature. It can also veto legislation passed by the legislature. The crown also has the power to grant royal assent to bills passed by the legislature.

The crown's influence on the judiciary is less well-known but still important. The crown has the power to appoint judges to the highest courts. It also has the power to grant royal assent to legislation that affects the judiciary.

In conclusion, the crown plays a significant role in the Canadian political system. It influences all three branches of government. While it may not have as much power as it did in the past, it still holds considerable influence over the executive, legislative, and judicial branches.

Overall, the influence of the crown on the state is complex and multifaceted. It is not just a matter of the crown appointing officials or granting royal assent to bills. It is also about the way the crown interacts with the other branches of government and how it influences their decisions. The crown's influence is often subtle and indirect, but it is nevertheless an important factor in the Canadian political system.