最大原理による電力系統の経済運用計画について

山城　迪*
菅井雅周**

The Economic Operation Schedule of Electric Power System by the Maximum Principle

(Department of Electricul Enginuring)

Susumu YAMASHIRO
Masahiro SUGAI

要　旨

本稿は揚水式水力発電所を含む電力系統の経済運用計画を離散形最大原理を用いて求めようとするもので，比較的簡単なモデル系統を対象に問題の定式化と数値計算を行なった。

Synopsis

In this paper, authors intend to apply the discreat maximum principle for the econonomic operation schedule of electric power system which includes pumped storage power station, and we tried mathematical formulation and numerical calculation for the simple model system.

I　緒　言

電力系統の経済運用計算法には，Dynamic programing, gradient method などが知られているが，最大原理についてはこれらの手法ほど広く知られていない。

最大原理を用いる際に最も困難を感じる点は，問題が初期随伴変数と最終段における状態変数に関する二点境界値問題となること，そこで境界条件を満足せしめる初期随伴変数の決定に組織だった方法がなく，試行錯誤的に求めなければならないことである。

従って，一般に状態変数の数の増加にともない計算量が飛躍的に増大する。

しかしながら，数値計算を行なう際に，例えば Dynamic programing 法では発電所の数の増加にともない，計算量の増加はもとより，所要コアメモリの数が幾何級数的に増え，適用可能な系統規模の大きさに限度があるが，その点最大原理では，この制約はずっとゆるく，DPに比べて有利である。

* 助教授　電気工学科
** 助　手　電気工学科

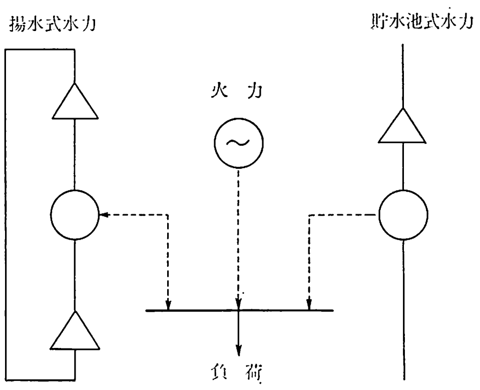
さて，近年の系統は電力需要の増加にともない大容量火力，原子力，および大容量揚水式水力等の発電設備の増設が相次ぎ，この状況は当分続くものと予想される。こうした系統構成の中で揚水式水力が水系の他の発電設備と本質的に異なる点は，常時電力を供給するのではなく，必ず揚水すること，つまり他の発電設備からみれば負荷となることであり，それ故に，運用期間のどこかで，どれだけの水を使うべきか，また揚水すべきかを決定することは系統運用上重要な問題となる。

この揚水式水力の運用は火力ユニット群の起動停止とも密接な関係があり，増々複雑化してゆく，電力系統の経済運用を決める際，両者の関連をも考慮した運用法が要求される。

本稿は揚水式水力を含めた水・火力系統の日間経済運用計画へ最大原理を適用する一段階として簡単なモデル系統を対象に問題の解析を試みたものである。

II　離散形最大原理による問題の定式化

第1図に示すモデル系統を対象に定式化を進めるが，この系統の構成要素には次の制約条件が与えられているものとする。



第1図　モデル系統

(1) 運用期間（日間）中の貯水池式水力の使用水量(θ_1^n)はあらかじめ与えられていること。

$$\sum_{n=1}^{N} \theta_1^n = V \qquad (1)$$

たゞし，V: 定数，n: 時間帯

(2) 日間の揚水式水力の使用水量(θ_2^n)および揚水量は等しいこと。

$$\sum_{n=1}^{n} \theta_2^n = \sum_{n=1}^{N} \theta_3^n \qquad (2)$$

(3) 使用水量(θ_1^n, θ_2^n)，揚水量(θ_3^n)は次式を満足すること。

$$\underline{\theta}_1 \leqq \theta_1^n \leqq \overline{\theta}_1,\ \underline{\theta}_2 \leqq \theta_2^n \leqq \overline{\theta}_2,\ \underline{\theta}_3 \leqq \theta_3^n \leqq \overline{\theta}_3 \qquad (3)$$

(4) 運用期間中，電力需給平衡条件を満足すること。

$$PR^n = G^n - (W^n + PG^n) - PP^n \qquad (4)$$

たゞし PR: 負荷，G: 火力出力，PG: 揚水式水力出力，W: 貯水池式水力出力，PP: 揚水式水力入力。

(5) 火力出力(G^n)は次式を満足すること。

$$\underline{G} \leqq G^n \leqq \overline{G} \qquad (5)$$

また，簡単のために系統の送電損失は考えないものとする。以上(1)～(5)式の制約条件のもとで，日間の火力燃料費を最小にする系統運用を求めることが問題となる。

この問題に離散形最大原理を適用するために，まず状態変数として

(イ) 貯水池式水力の累積使用水量：X_1^n

(ロ) 揚水式水力の　〃　：X_2^n

(ハ)　〃　累積揚水量：X_3^n

(ニ) 火力の累積燃料費　：X_4^n

を取れば，運用期間中の第n時間帯と第$n-1$時間帯における状態変数の関係は

$$X_1^n = X_1^{n-1} + \theta_1^n \qquad (6)$$

$$X_2^n = X_2^{n-1} + \theta_2^n \qquad (7)$$

$$X_3^n = X_3^{n-1} + \theta_3^n \qquad (8)$$

$$X_4^n = X_4^{n-1} + F^n(G^n) \qquad (9)$$

こゝで F^n は燃料費を示す。

で表わされる。

目的関数(ϕ)は最終時間帯(N)までの累積燃料費であるから(9)式より

$$\phi = X_4^N \qquad (10)$$

となる。

一方，(6)～(9)式の状態変数に対応する随伴変数は次式によって与えられる。

$$Z_i^{n-1} = \partial H^n / \partial X_i^{n-1} \quad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (11)$$

こゝで，ハミルトン関数 H^n は

$$H^n = Z_1^n (X_1^{n-1} + \theta_1^n) + Z_2^n (X_2^{n-1} + \theta_2^n) + Z_3^n (X_3^{n-1} + \theta_3^n) + Z_4^n (X_4^{n-1} + F^n(G^n)) \qquad (12)$$

(11)式と(12式とから

$$Z_i^{n-1} = Z_i^n \qquad (13)$$

ところで，(10)式から，目的関数は X_4^n であり，かつ X_4^N の終端値は未定だから

$$Z_4^N = \partial\phi / \partial X_4^N = 1 \qquad (14)$$

となり，従って $Z_4^n = 1$ となる。

また，(10)式を $\phi = -X_4^N$ として，ϕ の最大化を目的としても同様な結果が得られるはずだから，$Z_4^n = -1$ として(12)式のハミルトン関数を最大にすることを考える。

ところで(12)式のハミルトン関数を最大にするための条件は，4個の制御変数 θ_1^n, θ_2^n, θ_3^n, G^n の各々で H^n を偏微分し零と置いて得られる連立方程式から求めることができる。

たゞし，制約条件式(4)から知られるように θ_1^n, θ_2^n, θ_3^n, G^n のうち，いずれか3個が定まれば残りの1個は必然的に(4)式から求まるから，独立変数は3個とし取り扱うことができる。いま,(12)式にラグランシュ乗数 λ^n を用いて(4)式の制約条件を導入すれば

$$H^{n\prime}=H^n-\lambda^n(PR^n-W^n-PG^n-G^n+PP^n) \tag{15}$$

故に

$$\frac{\partial H^{n\prime}}{\partial\theta_1{}^n}=Z_1{}^n+\lambda^n\frac{\partial W^n}{\partial\theta_1{}^n}=0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial H^{n\prime}}{\partial\theta_2{}^n}=Z_2{}^n+\lambda^n\frac{\partial PG^n}{\partial\theta_2{}^n}=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial H^{n\prime}}{\partial\theta_3{}^n}=Z_3{}^n-\lambda^n\frac{\partial PP^n}{\partial\theta_3{}^n}=0 \tag{18}$$

$$\therefore\quad \lambda^n=-\frac{Z_1{}^n}{\partial W^n/\partial\theta_1{}^n}=-\frac{Z_2{}^n}{\partial PG^n/\partial\theta_2{}^n}=\frac{Z_3{}^n}{\partial PP^n/\partial\theta_3{}^n} \tag{19}$$

ここで，貯水池式水力，揚水式水力の落差を一定とすれば，

$$W^n=C_1\ H_1\ \theta_1{}^n \tag{20}$$

$$PG^n=C^2\ H_2\ \theta_2{}^n \tag{21}$$

$$PP^n=C_3\ H_3\ \theta_3{}^n \tag{22}$$

たゞし C_1, C_2, C_3 は定数

故に(19)式は，

$$\lambda^n=-\frac{Z_1{}^n}{C_1H_1}=\frac{-Z_2{}^n}{C_2H_2}=\frac{Z_3{}^n}{C_3H_3} \tag{23}$$

このことから，水系の落差を一定とすれば，3個の随伴変数を求める問題が唯1個の随伴変数の決定問題となり計算は非常に簡単化されることがわかる。

最後に，状態変数 X_1, X_2, X_3 の境界条件は先に述べた(1)，(2)式から

$$X_1{}^N=V \qquad V,V'\text{は定数} \tag{24}$$
$$X_2{}^N=X_3{}^N=V'$$

となる。

以上，述べたことを要約すると，送電損失を考えず，水系の落差を一定とし，かつ貯水池容量を充分大きいものと仮定すれば，問題は(3)～(5)式の制約条件のもとで，(23)式で関係づけられる随伴変数により，ハミルトニヤンを最大にする制御変数 $\theta_1{}^n$, $\theta_2{}^n$, $\theta_3{}^n$, G^n を見出すこと，かつ，境界条件(24)式を満足せしめる初期随伴変数を見つけることである。

Ⅲ 試　算　例

第1表に，第1図のモデル系統を構成する各要素の特性を示す。第2図は計算の手順を示すフローチャートである。また第3図，および第2表に計算結果を示す。

計算には北海道大学大型計算センター，および京都大学大型計算センターの FACŌM 230-60 を使用した。

また，初期随伴変数の修正は2進分割法により行ない，繰り返し1回ごとの計算にほゞ，3.5秒を要した。第3図で，マイナスの出力は揚水式水力発電所が揚水していることを示しており，ベース負荷で揚水し，ピーク負荷で発電を行なう，通常の揚水運用と一致した結果が得られた。

第1表 モデル系統諸元

貯水池式水力		
定数	記号	数値
有効落差	H_1	120 (m)
最大使用水量	$\overline{\theta}_1$	73 (m^3/s)
最小使用水量	$\underline{\theta}_1$	$(3m^3/s)$
無効 〃	θ_0	〃
最大出力	$\overline{W}$	75 (m^3/s)
効率	η	92 (%)
流入量	J_1	60 (m^3/s)

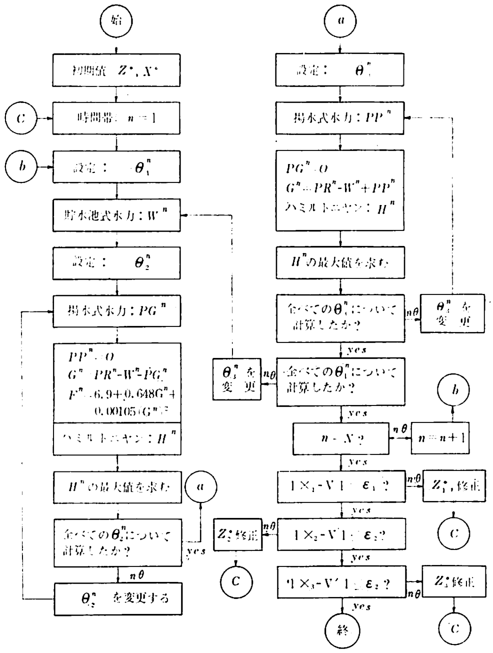
火力		
最大出力	$\overline{G}$	175 (MW)
最小出力	$\underline{G}$	50 (MW)
燃料費 $F=6.9+0.648G+0.00105G^2$		

揚水式水力		
定数	記号	数値
有効落差	H_2, H_3	220 (m)
最大使用水量	$\overline{\theta}_2$	27 (m^3/s)
最小使用水量	$\underline{\theta}_2$	0
最大出力	$\overline{PG}$	75 (MW)
最大揚水量	$\overline{\theta}_3$	19 (m^3/s)
最小 〃	$\underline{\theta}_3$	0
最大入力	$\overline{PP}$	50 (MW)
揚水効率	η_P	81 (%)
発電効率	η_G	85 (%)
流入量	J_2	0

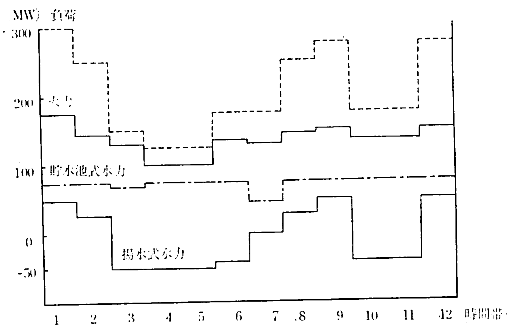
第2表　計　算　結　果

N	θ_1 (m³/s)	θ_2 (m³/s)	θ_3 (m³/s)	GGO (MW)	PO (MW)	PGO (MW)	PPO (MW)	PR (MW)	X_1 (m³/s)	X_2 (m³/s)	X^3 (m³/s)	X_4	FFO	HMAX
1	73	27	0	175	76	49	0	300	73	27	0	304.6	304.6	− 544.2
2	73	15	0	147	76	27	0	250	146	42	0	554.1	249.4	− 991.2
3	69	0	19	130	71	0	51	150	215	42	19	771.8	217.7	−1251.0
4	73	0	19	101	76	0	51	125	288	42	38	937.3	165.5	−1462.7
5	73	0	19	101	76	0	51	125	361	42	57	1102.8	165.5	−1678.2
6	73	0	15	140	76	0	41	175	434	42	72	1339.2	236.4	−1988.7
7	45	0	0	130	45	0	0	175	479	42	72	1556.3	217.0	−2295.2
8	73	15	0	147	76	27	0	250	552	57	72	1805.7	249.4	−2742.1
9	73	27	0	150	76	49	0	275	625	84	72	2060.9	255.2	−3236.9
10	73	0	15	140	76	0	41	175	698	84	87	2297.3	236.4	−3543.4
11	73	0	15	140	76	0	41	175	771	84	102	2533.7	236.4	−3849.9
12	73	27	0	150	76	49	0	275	844	111	102	2788.9	255.2	−4344.6

注：N(時間帯)，θ_1, θ_2, θ_3（貯水池式水力使用水量，揚水式水力使用水量，および揚水量），GGO(火力出力)，PO(貯水池出力)，PG(揚水出力)，PP(揚水入力)，PR(負荷)，FFō(燃料費)，HMAX（ハミルトンヤン)。



第2図　フローチャート



第3図　負荷曲線と最適運用曲線

Ⅳ　ダイナミックプログラミングによる方法

同じ問題に対して，*D.P* を適用すると次の様に定式化することができる。

いま，貯水池水力の貯水量を V^n，使用水量を Q^n とすれば

$$V^{n+1}=V^n-Q^n+J^n \tag{25}$$

こゝで，J^n は n 時間帯における流入量有効落差を一定とすれば，出力 P^n は

$$P^n=C_1H_1Q^n \tag{26}$$

一方，揚水式水力の上部貯水池，下部貯水池の貯水量を $W_1{}^n$，$W_2{}^n$ とすれば，

$$W_1{}^{n+1}=W_1{}^n-QQ_1{}^n+QQ_2{}^n \tag{27}$$

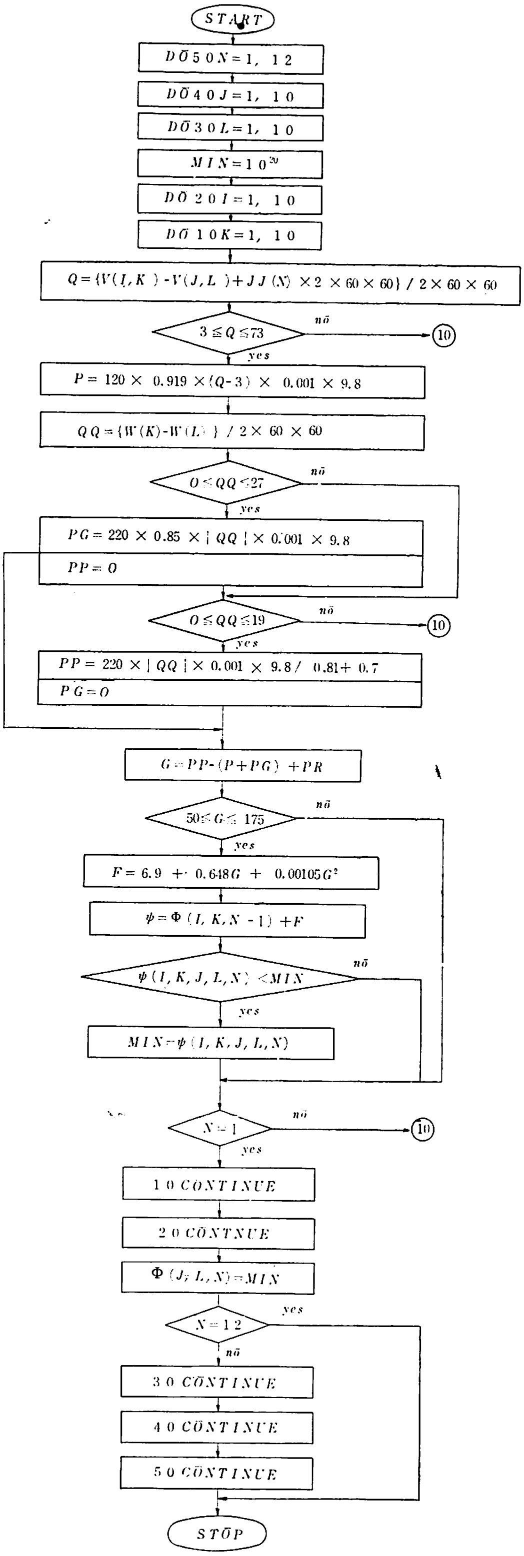
$$W_2{}^{n+1}=W_2{}^n+QQ_1{}^n-QQ_2{}^n \tag{28}$$

ここで，$QQ_1{}^n$ は使用水量，$QQ_2{}^n$ は揚水量を示す。有効落差を一定と仮定すれば，揚水の入・出力は

$$PG^n=C_2H_2QQ_1{}^n \tag{29}$$

$$PP^n=C_3H_3QQ_2{}^n \tag{30}$$

また，P^n，PG^n，PP^n，火力出力 G^n と負荷 PR^n



第4図

の関係は，

$$PR^n = G^n - P^n - (PG^n - PP^n) \tag{31}$$

(31) 式から求まる G^n により燃料費 F^n は

$$F^n = F^n(G^n) \tag{32}$$

従って，第 n 時間帯までの燃料費 ϕ^n は

$$\phi(V^n,\ W^n,\ Q^n,\ QQ^n) = F^n(G^n) + \Phi^{n-1}(V^{n-1},\ W^{n-1}) \tag{33}$$

たゞし

$$\Phi^n(V^n,\ W^n) = \underset{(Q^n,\ QQ^n)}{Min}\{\phi(V^n, W^n, Q^n, QQ^n)\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi^0 = O \\ &V^n,\ W = \text{指定値} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(33) 式の漸化式に従って，第1時間帯から，最終時間帯までの計算を進めていけば解が求まる。第4図にフローチャートを示す。

Ⅵ 結　　言

電力系統の経済運用計画への最大原理適用の第1段階として簡単なモデル系統への適用を試みた。その結果，水系の落差を一定とした場合には，修正すべき初期随伴変数の数が発電要素の増加関係なく唯一個となり計算が簡単化されることがわかった。また，計算プログラムを求めた。(附録参照)

今後，これをもとに，一般的な系統への適用を試みる予定である。

参 考 文 献

1) 呉　電学誌　Vol. 87-4　No. 943
2) 山城　電学会北海道支部大会．昭45年　81
3) E.B.Dahlin, IEEE.　1966．May.

(昭和46年1月11日受理)

附録：最大原理によるプログラム

```
      C     OPTIMAL OF HYDRO-THERMAL POWER SYSTEM
      C     DISCRETE MAXIMUM PRINCEPLE METHOD 1970.11.15(S.YAMASHIRO)
 1          DIMENSSION X(4,13),F(13),PR(13),V(3),E(3),DIF(3),Z(3),DELZ(3),DELZI
          1 N(3),DIFO(3)
 2          DATA A,B,C,GMAX,GMIN/6.9,0.648,0.00105,175.0,50.0/,HEAD1,ETAP,HEAD2
          1 2,ETA1,ETAG,PO,OMIN/120.0,0.81,220.0,0.919,0.85,0.73,3.0/
 3          DATA V,E,PR/840.0,2*110.0,20.0,2*10.0,0.0,300.0,250.0,125.0,
          1,125.0,2*175.0,250.0,275.0,2*175.0,275.0/,DIFO,DELZ,DELZIN/3*0.0,6
          2*0.01/
 4          Z(1)=-1.9892455
 5          Z(2)=-3.5
 6          Z(3)=5.0
 7          LC=1
 8      8   CONTINUE
 9          DATA(X(I.1),I=1,4)/4*0.0/
10          WRITE(6,1001)LC,Z,DELZ
11    100 1 FORMAT(1HO,5X,3HLC=,13,5H Z1=,F12.7,5H Z2=F12.7,5H Z3=,F12.7,8H
          2 DELZ1=,F12.7,8H DELZ2=,F12.7,8H DELZ3=,F12.7/1HO,7X,1HN,7H
          3 O1,7H     O2,7H     O3,7H     GGO,7H     PO,7H     PGO,7H     PPO,7H
          4 PR,7H     X1,7H     X2,7H     X3,13X,2HX4,12X,3HFFO,11X,4HHMA
          5 X)
12          DO 1000 N=2,13
13          HMAX=-1.E30
14          DO 900 J1=3,73,2
15          PO=9.8*ETA1*HEAD1*(J1-OMIN)*0.001
16          PPP=0.0
17          J3=0
18          DO 800 J2=1,28
19          PGG=9.8*ETAG*HEAD2*(J2-1)-0,001
20          GG=PR(N)-PO-PGG
21          IF(GG.GT.GMAX.OR.GG.LT.GMIN) GO TO 800
22          FF=(=A+B*GG+C*GG**2)*2.
23          X1=X(1,N-1)+J1
24          X2=X(2,N-1)+J2-1
25          X3=X(3,N-1)+J3
26          X4=X(4,N-1)+FF
27          HH=X1*Z(1)+X2*Z(2)+X3*Z(3)-X4
28          IF(HH.LE.HMAX)GO TO 800
29          HMAX=HH
30          O1=J
31          O2=J2-1
32          O3=J3
33          GGO=GG
34          FFO=FF
35          PGO=PGG
36          PPO=PPP
37          PO=PQ
38    800   CONTINUE
39          PGG=O.
```

```
      J2=O.
      DO 700 J3=2, 20
      Q3=J3-1
      PPP=9.8*HEAD2*Q*0.001/ETAP+PO
      GG=PR(N)+PPP-PQ
      IF(GG.GT.GMAX.OR.GG.LT.GMIN) GO TO 700
      FF=(A+B*GG+C*GG**2)*2.
      X2=X(2,'N-1)+J2
      X3=X(3,N-1)+Q3
      X4=X(4,N-1)+FF
      HH=X1*Z(1)+X2*Z(2)+X3*Z(3)-X4
      IF(HH.LE.HMAX) GO TO 700
      HMAX=HH
      O1=J1
      O2=J2
      O3=Q3
      GGO=GG
      PGO=PGG
      PPO=PPP
      FFO=FF
      PO=PQ
  700 CONTINUE
  900 CONTINUE
      X(1,N)=X(1,N-1)+O1
      X(2,N)=X(2,N-1)+O2
      X(3,N)=X(3.N-1)+O3
      X(4,N)=X(4,N-1)+FFO
      WRITE(6,1100) N,O1,O2,O3,GGO,PO,PGO,PPO,PR(N),(X(I,N),I=1,4),FFO,H
     1MAX
 1100 FORMAT(6X,I3,11F.0,3F15.6)
 1000 CONTINUE
      LC=LC+1
      DO 100 I=1,3
      DIIF(I)=X(I,13)-V(I)
      IF(ABS(DIF(I)).LT.E(I)) GO TO 150
      M=1
      GO TO 200
  150 DELZ(I)=DELZN(I)
  100 CONTINUE
      GO TO 500
  200 IF(DIFO(M)* DIF(M)) 250, 260, 260
  250 DELZ(M)=DELZ(M)/2.0
  260 DIFO(M)=DIF(M)
      IF(DIF(M)) 300, 400, 400
  300 Z(M)=Z(M)+DELZ(M)
      GO TO 8
  400 Z(M)=Z(M)=DELZ(M)
      GO TO 8
  500 STOP
      END
```