

潜在構造分析法における事例研究 I

—— 数学に対する親近感と学習意欲の分析 ——

金 田 嶋*

A Case Study in Latent Structure Analysis I

—— An Analysis of the Familiarity and the Will of
Study with Mathematics ——

Takashi KANETA

要 旨

アンダーソンの解法によって、本校学生の数学に対する親近感と学習意欲の潜在構造を明らかにした。更にその解法の概要を述べ、計算手続および分析結果の処理について詳しく述べた。

Synopsis

This article intends to clarify the latent structure on the familiarity and the will of study with mathematics in the students of Tomakomai Technical College, by using T. W. Anderson's solution. Besides, this article states the out-line of T. W. Anderson's solution, and gives a detailed statments on the calculation procedure and the treatment of the result.

1. は じ め に

教科の如何を問わず日頃教授するものの立場として、学生がその教科や授業についてどのような意識、態度で接しているのかは大きな関心事であり、またその的確な把握が効果的な授業の前提として要求されることは論を待たない。考査の結果、授業時の反応、学生との接触時あるいは教授者自身の経験による勘などによって判断しているのが普通であると思われる。更に客観性を高めるためには適当な質問調査などを実施して種々な分析をしなければならない。実際必要に応じて簡単な応答集計から複雑な数学的手法によるものまで適宜行なわれている。

筆者は態度測定の数学的手法の一つである潜在構造分析法によって、本校学生の数学に対する親近感、学習意欲の潜在構造の析出を試みた。工業高専の学生にとっては数学の知識、計算技術、数学的思考方法等の修得にはかなりの比重がかけられている現実と高専を選んだ学生なら大多数が数学に好意的であり、得意であると思われるが、実際にはそのように理解できな

い場面に出会うこともしばしばある。この辺の理解を深める目的をもって行なわれたものである。潜在構造分析法には創案者ラザースフェルドの解法をはじめとして、グリーン、アンダーソン、ギブソンなどの解法があるが、行列論を用いた手法で質問項目が3の場合には比較的簡単に解けるアンダーソンの解法によった。この稿はその数理の概要と計算過程とを示し、分析の結果について述べたものである。

2. アンダーソンの解法の数理の概要

(1)態度、行動あるいは客観的属性などの測定しようとする事柄について、一群の質問項目が調査対象の集団に使用され、人々がそれに反応したとき（反応は2分的とする）一連の反応の背後に、ある一つの潜在的な態度の連続体 X が存在すると仮定する。(2)この連続体 X の微小区間 dx に対して、 dx 内に入る人々の数が $\varphi(x)dx$ であるような分布密度関数 $\varphi(x)$ によって集団が X 上に分布しているとする。(3) X 上の1点 x にある人が項目 i に対して正の反応をする確率は x の関数 $f_i(x)$ であるとする。これを図示すると、たとえば図 2.1 のような軌跡線となる。

* 講師 一般教科

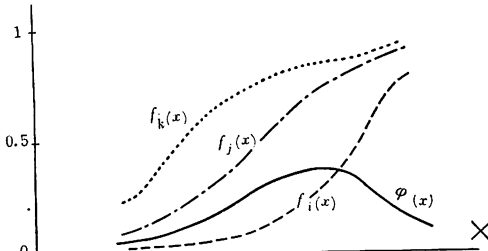


図 2.1 連続な潜在構造と軌跡線

(4)微小区間 dx 内で項目 i に正の反応をする人々の全体に対する割合は $\varphi(x)f_i(x)dx$ 、全区間で項目 i に正の反応をする人の割合は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f_i(x)dx = \pi_i \quad (2.1)$$

である。 π_i は調査結果であり実測値である。(5)すべての項目間の相互関係は統計的には独立であると考ええる。このことは $f_{ij}(x)$ は項目 i, j に同時に正の反応をする確率とすると

$$f_{ij}(x) = f_i(x)f_j(x) \quad (2.2)$$

である。これはすべての x とすべての項目について成立するから、全区間で項目 i, j 、項目 $i, j, \dots, k$ に同時に正の反応をする人の割合は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f_i(x)f_j(x)dx = \pi_{ij} \quad (2.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f_i(x)f_j(x)\dots f_k(x)dx = \pi_{ij\dots k} \quad (2.4)$$

である。方程式(2.1), (2.3), (2.4)の右辺に実測値を入れて左辺の $\varphi(x)$, $f_i(x)$, $f_j(x)\dots$ を知ろうとするのであるが、このままでは解けないので $\varphi(x)$ は離散的な分布をすると考え、集団は m 個の互に排反かつ同質的な部分集団(潜在クラス)に分割されるものとする。この考えによる解法の一つがアンダーソンの方法である。

標本の大きさ n 、部分集団の数 m 、項目数を k としてつぎの記号を導入する。

π_i ; 項目 i に正の反応を示す確率

$\pi_{ij\dots k}$; 項目 $i, j, \dots, k$ に同時に正の反応を示す確率

ν^α ; 部分集団 α から標本が抽出される確率

λ_i^α ; 部分集団 α から抽出された標本が項目 i に正の反応を示す確率

ここで1つのきまった部分集団の中では、項目 i と項目 j に対する反応は独立であるとする。すなわち $\lambda_{ij}^\alpha = \lambda_i^\alpha \cdot \lambda_j^\alpha$ とする。

以上から潜在構造模型(表2.1)と離散の場合の項目 i, j の正反応の確率と潜在クラスの分布(図2.2)および(2.1), (2.3), (2.4)に対応

して得られる潜在構造方程式は次の通りである。

表 2.1 潜在構造模型

潜在クラス	各項目の潜在寄与率				
	項目 1	項目 2			項目 k
ν^1	λ_1^1	λ_2^1			λ_k^1
ν^2	λ_1^2	λ_2^2			λ_k^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ν^m	λ_1^m	λ_2^m			λ_k^m

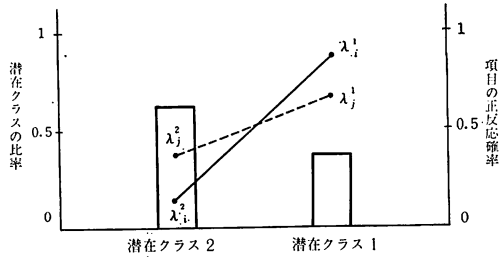


図 2.2 離散的な潜在構造と軌跡線

$$\pi_i = \sum_{\alpha=1}^m \nu^\alpha \lambda_i^\alpha \quad (2.5)$$

$$\pi_{ij} = \sum_{\alpha=1}^m \nu^\alpha \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \quad (i \neq j) \quad (2.6)$$

$$\pi_{ij\dots k} = \sum_{\alpha=1}^m \nu^\alpha \lambda_i^\alpha \lambda_j^\alpha \dots \lambda_k^\alpha \quad (i \neq j \neq \dots \neq k) \quad (2.7)$$

$$\sum_{\alpha=1}^m \nu^\alpha = 1 \quad (2.8)$$

行の添字は潜在クラス、列の添字は質問項目を示すとして A をつぎのように定義する。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \dots & \lambda_k^1 \\ 1 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_1^m & \lambda_2^m & \dots & \lambda_k^m \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

第1列の要素は $\lambda_0^\alpha = 1$ となっていて、いつも正の反応をするような仮空の項目であるとする。つぎに ν^α を対角要素としてもつ行列 N を作る。

$$N = \begin{bmatrix} \nu^1 & & & 0 \\ & \nu^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nu^m \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

また、 A_1 は A の最初の m 個の行と列をとって

作った行列, A_2 は A の第 1 列と A_1 に含まれない A の残りの $(m-1)$ 個の列からなる $m \times m$ 行列とする。すなわち

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_{m-1}^1 \\ 1 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{m-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_1^m & \lambda_2^m & \cdots & \lambda_{m-1}^m \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_m^1 & \lambda_{m+1}^1 & \cdots & \lambda_{2m-2}^1 \\ 1 & \lambda_m^2 & \lambda_{m+1}^2 & \cdots & \lambda_{2m-2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m^m & \lambda_{m+1}^m & \cdots & \lambda_{2m-2}^m \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

さらに A を λ_k^α を対角要素にもつ対角行列であるとす。ここでは k は A_1, A_2 に含まれていない A の中の項目番号で $k > 2m-2$ である。

$$A = \begin{bmatrix} & \lambda_k^1 & & & 0 \\ & & \lambda_k^2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_k^m \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A_1 は $(m-1)$ 個の項目を, A_2 は A_1 とは別の $(m-1)$ 個の項目を使い, さらに k 番目の項目は A を作るために必要であるから $2(m-1)+1=2m-1$ 個の項目を要する。

(2.5), (2.6), (2.7) を行列の形でまとめるために $\pi_{0jk} = \pi_{jk}$, $\pi_{00k} = \pi_{0k} = \pi_k$, $\pi_{000} = \pi_{00} = \pi_0 = 1$ と定義し, π をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \Pi &= \begin{bmatrix} \pi_{00k} & \pi_{0mk} & \pi_{0,m+1,k} & \cdots & \pi_{0,2m-2,k} \\ \pi_{10k} & \pi_{1mk} & \pi_{1,m+1,k} & \cdots & \pi_{1,2m-2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_{m-1,0k} & \pi_{m-1,mk} & \pi_{m-1,m+1,k} & \cdots & \pi_{m-1,2m-2,k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \pi_k & \pi_{mk} & \pi_{m+1,k} & \cdots & \pi_{2m-2,k} \\ \pi_{1k} & \pi_{1mk} & \pi_{1,m+1,k} & \cdots & \pi_{1,2m-2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_{m-1,k} & \pi_{m-1,mk} & \pi_{m-1,m+1,k} & \cdots & \pi_{m-1,2m-2,k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Π^* は Π の各要素 π_{ijk} を π_{ij} におきかえた行列で Π と同じものとみなす。

$$\Pi^* = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_m & \pi_{m+1} & \cdots & \pi_{2m-2} \\ \pi_1 & \pi_{1m} & \pi_{1,m+1} & \cdots & \pi_{1,2m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_{m-1} & \pi_{m-1,m} & \pi_{m-1,m+1} & \cdots & \pi_{m-1,2m-2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Π, Π^* は (2.10), (2.11), (2.12), (2.13) であらわされるからつぎの基本方程式を得る。

$$\Pi = A_1' N A A_2 \quad (2.16)$$

$$\Pi^* = A_1' N A_2 \quad (2.17)$$

そこで, つぎのような行列方程式を考える。

$$|\Pi - \theta \Pi^*| = 0 \quad (2.18)$$

この行列方程式の根 $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$ は反応の確率から決定される。 $|\Pi - \theta^\alpha \Pi^*| = 0$ から行列 $\Pi - \theta^\alpha \Pi^*$ は特異行列で

$$\Pi x^\alpha = \theta^\alpha \Pi^* x^\alpha \quad (2.19)$$

を満たす列ベクトル x^α をみつけることができる。(2.18) の根がすべて異なるなら x^α は一意に決定され, 行列 $\Pi - \theta^\alpha \Pi^*$ のランクが $m-1$ であることより線型独立な解が存在する。

いま $X = (x^1, x^2, \dots, x^m)$ とし, α 番目の対角要素として θ^α をもつ対角行列を Θ とすると (2.19) は (2.20) であらわせる。

$$\Pi X = \Pi^* X \Theta \quad (2.20)$$

$\Theta = A$ として, (2.16), (2.17) と X を A_2^{-1} でおきかえることによって

$$A_1' N A A_2 A_2^{-1} = A_1' N A_2 A_2^{-1} A$$

となり一つの解は $X = A_2^{-1}$ である。いま Θ が順序づけられると X は一意に決定される。ただし X の定数倍は同一とみなす。従って E を対角行列として $X = A_2^{-1} E$ とあらわせるから $A_2 = E X^{-1}$ となる。

つぎに $(y^\alpha)' (\Pi - \theta^\alpha \Pi^*) = 0$ を満たすベクトル $(y^\alpha)'$ を考える。変換して

$$\Pi' y^\alpha = \theta^\alpha \Pi^* y^\alpha \quad (2.21)$$

x^α の場合と全く同様に $Y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$ とおけば

$$\Pi' Y = \Pi^* Y \Theta \quad (2.22)$$

を得る。 $\Theta = A$ とすれば (2.22) の解は一意に $Y = A_1^{-1}$ である。 X と同様 $Y = A_1^{-1} E_y$ とあらわせて $A_1 = E_y Y^{-1}$ となる。ここで E_y の対角要素は Y^{-1} の対応する行の最初の要素の逆数である。最後に (2.17) の左から $(A_1^{-1})'$, 右から A_2^{-1} をかけると $N = (A_1^{-1})' \Pi^* A_2$ となる。これは潜在クラスの大きさを求めたことになりすべてのパラメーターを推定しえたことになる。なおつぎの方法によって逆行列の計算をさけることができる。

$$\Pi^*X = (A_1'NA_2)(A_2^{-1}E_x) = A_1'NE_x \quad (2.23)$$

$$\Pi^*Y = (A_2'NA_1)(A_1^{-1}E_y) = A_2'NE_y \quad (2.24)$$

$$A_1Y = A_1A_1^{-1}E_y = E_y = N^{-1}(NE_y) \quad (2.25)$$

以上がアンダーソンの解法の概要である。

3. 数学に対する親近感の潜在構造分析

3.1 潜在構造推定の手順

本校学生の数学に対する親近感、学習意欲、授業への満足感についての構造を知るために行なった11項目の質問調査のうち好意層を析出するための4項目をとりあげる。

これは本校学生第4学年まで(547名)を対象として昭和45年11月中旬実施したもので有効サンプル数は504である。この調査に先だち11月上旬に第3学年3クラス、第1学年1クラスの計4クラスについて予備調査を行ない、質問項目、回答肢の改良を試み実施したものである。

質問項目は次の通りである。

Q₁; あなたは数学が社会の進歩にかなり貢献していると思いますか。

Q₂; あなたは一般的に云って、数字や数表で表わされている事柄に多少とも興味をもっていると思いますか。

Q₃; あなたは数学の知識が豊富な人ほど実社会の生活で何かと有利だと思いますか。

Q₄; あなたは学校で学ぶ教科目のうちで、どちらかと云えば数学が好きな方だと思いますか。

回答肢はすべて (1) 強くそう思う (2) そう思う (3) どちらとも云えない (4) そう思わない (5) 強くそう思わない であり(1), (2)を正の反応, (3), (4), (5)を負の反応と2分した。アンダーソンの解法では項目数が奇数個なので、質問 Q₁を除いた。実際正の応答数も438で87%に及び偏りがひどく適当でないと思われる。

Q₂は数への興味、Q₃は数学知識の有効性、Q₄は数学の好嫌性についての質問である。この3項目に共通な因子として数学への好意意識を仮定している。集計結果は表3・1に示す通りである。この表において反応率の列は記号 n_{ijk} ($i \neq j \neq k$) をサンプル数 n で割ったものである。表3・2は表3・1から作った正の反応頻度 ($n=504$ で割ったもの) を示し、1項目の頻度は $\frac{n_i}{n}$ ($i=1, 2, 3$)、2項目組合せ頻度は $\frac{n_{ij}}{n}$ ($i \neq j, i, j=1, 2, 3$) を示す。表3・3は項目3を固定して他の2項目との組合せ頻度 $\frac{n_{ijk}}{n}$ ($i \neq j \neq k, k$ 固定) を示す。

表 3・1 数学に対する親近感の
潜在構造分析基礎表

No.	反 応 型				反 応 頻 度		
	1 Q ₂	2 Q ₃	3 Q ₄	頻度	記号	頻度	反 応 率
1	+	+	+	61	n	504	1.000000
2	+	+	-	44	n_1	265	0.525793
3	+	-	+	89	n_2	174	0.345238
4	-	+	+	20	n_3	209	0.414683
5	+	-	-	71	n_{12}	105	0.208333
6	-	+	-	49	n_{13}	150	0.297619
7	-	-	+	39	n_{23}	81	0.160714
8	-	-	-	131	n_{123}	61	0.121032
				計 n	504		

表 3・2 正の反応頻度 ($n=504$ で割ったもの)

項 目 No.	1 項目 の頻度	2 項目 組 合 せ 頻 度		
		1	2	3
1	0.525793		0.208333	0.297619
2	0.345238	0.208333		0.160714
3	0.414683	0.297619	0.160714	

表 3・3 項目3と他の2項目との組合せの正の
反応頻度 ($n=504$ で割ったもの)

項 目 No.	1	2
1		0.121032
2	0.121032	

上記のようにデータが与えられているとき A_1 を項目1で、 A_2 を項目2で、 A を項目3で作る。潜在構造を推定するために Π , Π^* の π_i , π_{ij} , π_{ijk} をその推定値である実測値 $\frac{n_i}{n}$, $\frac{n_{ij}}{n}$, $\frac{n_{ijk}}{n}$ でおきかえたものを P , P^* とおき、つぎの式で表わす。

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 23 \\ 13 & 123 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

のように項目を配置すればよい、この0, 1, 2, 3は項目を示す。

$$P = \begin{bmatrix} 0.414683 & 0.160714 \\ 0.297619 & 0.121032 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0.345238 \\ 0.525793 & 0.208333 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

まずつぎの行列方程式の根を求める。

$$|P - tP^*| = \begin{vmatrix} 0.414683 - t & 0.160714 - 0.345238t \\ 0.297619 - 0.525793t & 0.121032 - 0.208333t \end{vmatrix} = 0 \quad (3.5)$$

この方程式は2次方程式で根を t^1, t^2 とすると $t^1 = 0.607409, t^2 = 0.144949$ となる。これは(2.18)の θ を求めたことにひとしく、各 θ は(2.13)の Δ に対応する対角要素にひとしいから、項目 k (この例では項目3)に関する潜在寄与率の推定値を求めたことになる。

行列 $P - tP^*$ の t のかわりに t^1, t^2 を代入すると

$$P - t^1P^* = \begin{bmatrix} -0.192726 & -0.048987 \\ -0.021752 & -0.005511 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

同様にして

$$P - t^2P^* = \begin{bmatrix} 0.269734 & 0.110672 \\ 0.221406 & 0.090834 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$|P - tP^*| = 0$ から行列 $P - tP^*$ は特異である。ベクトル x^1, x^2 の推定値が $\hat{x}^1, \hat{x}^2$ であるように(3.6), (3.7)の各行の余因子の集合をとる。もし第1行の余因子を用いるなら、これらのベクトルの成分は次の通りである。

(3.6)の第1行の余因子

(1, 1)の余因子 = -0.005511

(1, 2)の余因子 = 0.021752

(3.7)の第1行の余因子

(1, 1)の余因子 = 0.090834

(1, 2)の余因子 = -0.221406

したがって

$$\hat{X} = (\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \begin{bmatrix} -0.005511 & 0.090834 \\ 0.021752 & -0.221406 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

つぎに $P^*\hat{X}$ を求める。これは(2.23)の $\Pi^*X = A_1'NE_x$ を求めることにひとしく Π^*X の第1行は NE_x の対応する対角要素になる。

$$P^*\hat{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0.345238 \\ 0.525793 & 0.208333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{bmatrix} -0.005511 & 0.090834 \\ 0.021752 & -0.221406 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0.001999 & 0.014396 \\ 0.001634 & 0.001633 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$P^*\hat{X}$ の第1列の要素は NE_x の推定値 $\hat{NE}_x$ の対角要素に等しいから各列の最初の要素でそれぞれの列の要素を割ったものが A_1' の推定値になる。それを L_1' とおくと

$$L_1' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.817409 & 0.113434 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

つぎに(3.6), (3.7)の転置行列から $(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ を求めたのと同様な方法で $\hat{Y} = (\hat{y}^1, \hat{y}^2)$ を求める。

$$(P - t^1P^*)' = \begin{bmatrix} -0.192726 & -0.021752 \\ -0.048987 & -0.005511 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$(P - t^2P^*)' = \begin{bmatrix} 0.269734 & 0.221406 \\ 0.110672 & 0.099834 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

(3.11), (3.12)の第1行の余因子から

$$\hat{Y} = (\hat{y}^1, \hat{y}^2) = \begin{bmatrix} -0.005511 & 0.090834 \\ 0.048987 & -0.110672 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$P^*\hat{Y}$ を求める。これは(2.24)の $\Pi^*Y = A_2'NE_y$ を求めることを意味し、その第1行の要素は NE_y の対角要素になっている。

$$\begin{aligned} P^*\hat{Y} &= \begin{bmatrix} 1 & 0.525793 \\ 0.345238 & 0.208333 \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} -0.005511 & 0.090834 \\ 0.048987 & -0.110672 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 0.020246 & 0.032643 \\ 0.008303 & 0.008303 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$P^*\hat{Y}$ の第1行の要素は NE_y の推定値 $\hat{NE}_y$ の対角要素に等しいから、各列の最初の要素でそれぞれの列の要素を割ったものが A_2' の推定値になる。それを L_2' とおくと

$$L_2' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.410106 & 0.254358 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

(2.25)より $N^{-1} = A_1Y(NE_y)^{-1}$ であるから A_1Y に右から $(NE_y)^{-1}$ をかければ N^{-1} を得る。 NE_y の推

定値 $\hat{N}\hat{E}_y$ は (3. 14) の $P^*\hat{Y}$ の第 1 行によって求められ NE_y は対角行列だから、その逆行列の $(NE_y)^{-1}$ は NE_y の各対角要素の逆数を求めれば容易に得られる。 L_1' の転置行列をつくれれば A_1 の推定値 L_1 が求められ、 $A_1Y(NE_y)^{-1}$ の推定値 $L_1\hat{Y}(\hat{N}\hat{E}_y)^{-1}$ を用いて N^{-1} の推定値 $\hat{N}^{-1}$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} \hat{N}^{-1} &= L_1\hat{Y}(\hat{N}\hat{E}_y)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.817407 \\ 1 & 0.113434 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} -0.005511 & 0.090834 \\ 0.048987 & -0.110672 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 49.3924 & 0 \\ 0 & 30.6344 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.705589 & 0.011326 \\ 0.002261 & 2.398062 \end{bmatrix} \quad (3. 16) \end{aligned}$$

N は対角行列だから N^{-1} も対角行列でなければならない。(3. 16) の非対角要素は計算の正確さを示すことになる。(3. 16) の対角要素の逆数が $\hat{N}$ の対角要素の推定値である。

$$\hat{N} = \begin{bmatrix} 0.586308 & 0 \\ 0 & 0.413692 \end{bmatrix} \quad (3. 17)$$

以上で潜在構造の推定値はすべて求められ、推定された構造は表 3. 4 に示す通りである。

表 3. 4 数学に対する親近感の潜在構造

潜在クラス	潜在クラス推定頻度	潜在クラス推定相対頻度	潜在寄与率		
			1 Q ₂ 数への興味	2 Q ₃ 知識の有効性	3 Q ₄ 数学の好嫌性
潜在好意クラス	295.5	58.63	81.74	41.01	60.74
潜在非好意クラス	208.5	41.37	11.34	25.44	14.49
計		504.0			

3. 2 潜在クラス別理論反応頻度の計算

反応パターンの理論反応頻度はつぎのように計算する。例えば+++というパターンに対応する理論反応頻度を求める式は

潜在クラス 1 に対しては $n^1\lambda_1^1\lambda_2^1\lambda_3^1$

潜在クラス 2 に対しては $n^2\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$

また++-というパターンについて云えば、

潜在クラス 1 に対しては $n^1\lambda_1^1\lambda_2^1(1-\lambda_3^1)$

潜在クラス 2 に対しては $n^2\lambda_1^2\lambda_2^2(1-\lambda_3^2)$

となる。表 3. 4 をもとに理論反応頻度を計算するとつぎようになる。反応型は左から 1, 2, 3 である。

$$\begin{aligned} &+++ \begin{cases} 295.5 \times 0.8174 \times 0.4101 \times 0.6074 = 60.2 \\ 208.5 \times 0.1134 \times 0.2544 \times 0.1449 = 0.9 \end{cases} \\ &++- \begin{cases} 295.5 \times 0.8174 \times 0.4101 \times 0.3926 = 38.9 \\ 208.5 \times 0.1134 \times 0.2544 \times 0.8551 = 5.1 \end{cases} \\ &+-+ \begin{cases} 295.5 \times 0.8174 \times 0.5899 \times 0.6074 = 86.6 \\ 208.5 \times 0.1134 \times 0.7456 \times 0.1449 = 2.6 \end{cases} \\ &-++ \begin{cases} 295.5 \times 0.1826 \times 0.4101 \times 0.6074 = 13.4 \\ 208.5 \times 0.8866 \times 0.2544 \times 0.1449 = 6.8 \end{cases} \\ &+-- \begin{cases} 295.5 \times 0.8174 \times 0.5899 \times 0.3926 = 55.9 \\ 208.5 \times 0.1134 \times 0.7456 \times 0.8551 = 15.1 \end{cases} \\ &-+- \begin{cases} 295.5 \times 0.1826 \times 0.4101 \times 0.3926 = 8.7 \\ 208.5 \times 0.8866 \times 0.2544 \times 0.8551 = 40.2 \end{cases} \\ &--+ \begin{cases} 295.5 \times 0.1826 \times 0.5899 \times 0.6074 = 19.3 \\ 208.5 \times 0.8866 \times 0.7456 \times 0.1449 = 20.0 \end{cases} \\ &--- \begin{cases} 295.5 \times 0.1826 \times 0.5899 \times 0.3926 = 12.5 \\ 208.5 \times 0.8866 \times 0.7456 \times 0.8551 = 117.8 \end{cases} \end{aligned}$$

これをまとめたのが表 3. 5 である。

表 3. 5 数学に対する親近感の潜在構造の理論頻度と精度

No.	I (反応型)			II (潜在クラス 1)	III (潜在クラス 2)	IV (理論反応頻度)	V (実測反応頻度)	VI (II/V × 100)
	1	2	3					
1	+	+	+	60.2	0.9	61.1	61	98.53
2	+	+	-	38.9	5.1	44.0	44	88.41
3	+	-	+	86.6	2.6	89.2	89	97.41
4	-	+	+	13.4	6.8	20.2	20	66.34
5	+	-	-	55.9	15.1	71.0	71	78.73
6	-	+	-	8.7	40.2	48.9	49	17.79
7	-	-	+	19.3	20.0	39.3	39	49.11
8	-	-	-	12.5	117.8	130.3	131	9.59
計				295.5	208.5	504.0	504	

精度 = 85.9%

適合度 99.5% 以上 ($\chi^2 = 0.0089$)

3. 3 潜在クラスの顕在化の方法、精度および適合度の計算

表 3. 5 の VI の欄は各反応パターンに属するもののうち潜在クラス 1 に属するものの理論比で、これが 50% 以上の反応パターンは潜在クラス 1 型、49% 以下の反応パターンは潜在クラス 2 型とみなす。このことから、反応型から逆に潜在クラスを顕在化することが可能である。

精度は II 列 (潜型クラス 1) の II/V × 100 が 50%

以上の理論反応頻度とⅢ列(潜在クラス2)のⅡ/Ⅳ×100が49%以下の理論反応頻度の合計を全サンプル数で割った割合で示す。これは潜在構造が一次元性を充足する程度を示すものである。表3.5によると精度は $\frac{433.0}{504} \times 100 = 85.9\%$ である。

またⅣ列とⅤ列すなわち理論反応頻度と実測反応頻度との適合を χ^2 でみる。

$\chi^2 = 0.0089$ これは $d.f. = 8 - 1 = 7$ の χ^2 分布の 99.5% 点 ($\chi^2_{0.995(7)} = 0.989$) とくらべて小さい。適合度は 99.5% 以上である。

3. 4. 分析結果について

分析基礎表(表3.1)から各質問項目に対する顕在反応の割合は Q_2 が 52.6%, Q_3 が 34.5%, Q_4 が 41.5% である。すなわち数字や数表に興味を示すものは 50% をこえ、数学の知識の実社会での有効性を認めているものはかなりの低率である。数学の好きなものは予想に反して 41.5% と低い割合を示している(図3.1)。このように各項目に対する顕在反応のみ採り上げた場合はその質問項目に関する情報しか得られず、適当な数学的处理などをしない限り全体を論ずることは難しい。この3間に共通な潜在連続体を求め、それに関する情報を得ることが重要であって、アンダーソンの方法によって推定された潜在構造(表3.4, 図3.2)から次のことがわかる。数学に対して好意的な層(クラス)は 58.63%, 非好意的な層は 41.37% である。潜在寄与率は各潜在クラスのなかで各項目に正の反応(好意的な反応)をしたものの割合を示し、項目1(質問 Q_2) に関して正の反応をしたものは潜在好意クラスのなかで 81.74%, 潜在非好意クラスのなかでも 11.34% いることを示している。項目2(質問 Q_3) に関しては潜在好意クラスからの寄与がそれほど高くなく 41.01% である。項目3(質問 Q_4) も好意層からの寄与率が 60.74% と高い方ではない。各項目を比較すると、各潜在クラスの寄与の差が一番大きいのは項目1(質問 Q_2) で数字や数表への興味に関する質問が潜在好意クラスと潜在非好意クラスとを弁別する上において一番すぐれていることがわかる。

3. 5 顕在化された潜在クラスにおける

学年差の検定

分析結果の活用として3.3の方法によって反応型による潜在クラスの顕在化を行なう。表3.5から反応型の No. 1, 2, 3, 4, 5 が潜在好意クラス, 反応型 No. 6, 7, 8 が潜在非好意クラスと分けられる。学年別に分類したものが表3.6である。

表 3. 6 顕在化された潜在クラスの学年別頻度

	1 年	2 年	3 年	4 年	計
潜在好意クラス	90	75	61	59	285
潜在非好意クラス	70	69	48	32	219
計	160	144	109	91	504

$$\chi^2 = 3.73 < \chi^2_{0.05(3)} = 7.815 \quad \text{有意差なし}$$

この図3.3によると第4学年の好意層の割合が大きいように思われるが、潜在好意クラスのものの方が学年によって異なるかどうかについての χ^2 検定を行なった結果、 $\chi^2 = 3.73$ となり $d.f. = 3$ の 5% 点 ($\chi^2_{0.05(3)} = 7.815$) に比べて小さいので有意差は認められない。

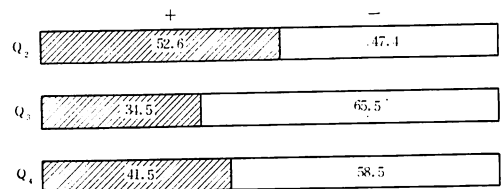


図 3. 1 各項目に対する顕在反応

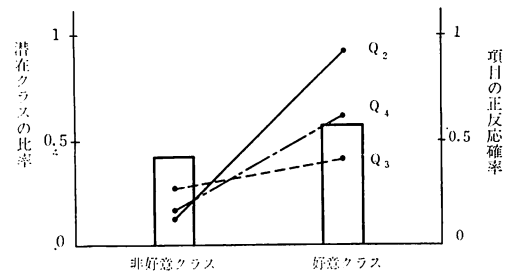


図 3. 2 潜在クラスと反応確率

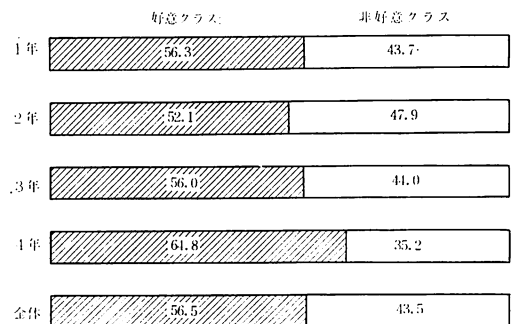


図 3. 3 学年別にみた潜在クラスの比率

4. 数学学習意欲と授業満足感の潜在構造分析

4. 1 学習意欲の潜在構造

質問項目はつぎの通りである。

Q₅; あなたは学校で学んでいる数学が自分なりに割合よく理解できている方だと思いますか。

Q₆; あなたは日頃学校で学んでいる数学の内容は現状の程度でよいと思いますか。

Q₇; あなたは学校で学ぶ数学に比較的負担を感じていない方だと思いますか。

Q₈; あなたは日頃の数学の学習には概して積極的に取り組んでいる方だと思いますか。

ここでは質問 Q₅, Q₇, Q₈ の3項目によって分析を行なった。質問 Q₆ を含む3通りの組合せではいずれか1つの項目に対する λ が $\lambda > 1$, $\lambda < 0$ となってすべて推定不能であった。

これは一連の質問群として取扱うのには無理な質問であったものと思われる。Q₅ は理解意識, Q₇ は非負担意識, Q₈ は積極性に関する質問である。3と同様の手順によって分析を行なった。反応頻度は表 4.1 に示す通りである。これによれば図 4.1 からわかるように各質問に対する顕在反応は25%前後でかなりの低率であることがわかる。推定された構造は表 4.2 で潜在意欲クラスは24.21%とかなり低い。また質問 Q₅ の理解意識の有無が意欲クラスと非意欲クラスとを弁別する上において大きく働いていることがわかる(図 4.1)。理論反応頻度は表 4.3 に示す通りで、精度は90.7%とかなり高く、適合度も99.5%以上であり十分信頼できる推定構造であると思われる。表 4.3 のⅥで50%以上の反応型をもつものを潜在意欲クラスとみなすと No.1, 2, 3, 4, 5 がこれに属する。この反応型をもつものを学年別に集計したものが表 4.4 である。図 4.3 のように図表化してみると3年の頻度が大きく違うように見受けられるが、 χ^2 検定での学年比については5%点で有意差は認められない。

表 4.1 数学学習意欲の潜在構造分析基礎表

No.	反 応 型			反 応 頻 度		
	1 Q ₅	2 Q ₇	3 Q ₈	頻度	記号	反応率
1	+	+	+	33	n	504
2	+	+	—	22	n_1	115
3	+	—	+	29	n_2	126
4	—	+	+	17	n_3	128
5	+	—	—	31	n_{12}	55
6	—	+	—	54	n_{13}	62
7	—	—	+	49	n_{23}	50
8	—	—	—	269	n_{123}	33
計 n				504		

表 4.2 数学学習意欲の潜在構造

潜在 クラス	潜在 クラス 推定 頻度	潜在 クラス 推定相 対頻度	潜在寄与率		
			1 Q ₅ 理 解	2 Q ₇ 非負担	3 Q ₈ 積極性
潜在意欲 クラス	122.0	24.21	77.18	54.98	62.90
潜在非意 欲クラス	382.0	75.79	5.48	15.48	13.52
計	504.0				

表 4.3 数学学習意欲の潜在構造の理論頻度と精度

No.	Ⅰ (反応型)			Ⅱ (潜在 クラ スⅠ)	Ⅲ (潜在 クラ スⅡ)	Ⅳ (理論 反応 頻度)	Ⅴ (実測 反応 頻度)	Ⅵ Ⅱ/Ⅳ ×100
	1	2	3					
1	+	+	+	32.6	0.4	33.0	33	98.79
2	+	+	—	19.2	2.8	22.0	22	87.27
3	+	—	+	26.7	2.4	29.1	29	91.75
4	—	+	+	9.6	7.6	17.2	17	55.81
5	+	—	—	15.7	15.3	31.0	31	50.65
6	—	+	—	5.7	48.3	54.0	54	10.56
7	—	—	+	7.9	41.3	49.2	49	16.06
8	—	—	—	4.7	263.9	268.6	269	1.75
計				122.1	382.0	504.1	504	

精度=90.7%

適合度 99.5%以上 ($\chi^2=0.0041$)

表 4.4 学習意欲の顕在化された潜在クラスの学年別頻度

	1 年	2 年	3 年	4 年	計
潜在意欲 クラス	41	33	36	22	132
潜在非意 欲クラス	119	111	73	69	372
計	160	144	109	91	509

$\chi^2=3.629 < \chi^2_{0.05(3)}=7.815$ 有意差なし

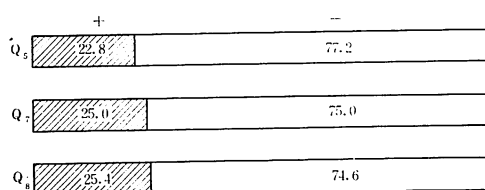


図 4.1 学習意欲の各項目に対する顕在反応

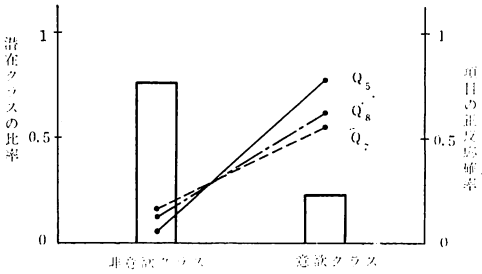


図 4.2 学習意欲潜在クラスと反応確率

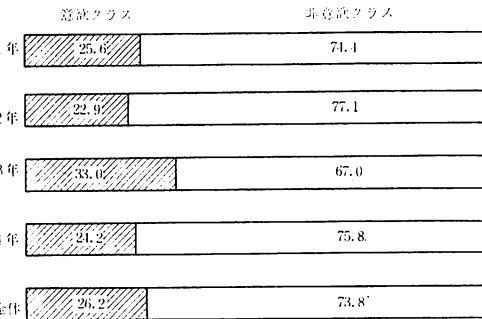


図 4.3 学習意欲の学年別にみた潜在クラスの比率

4.2 授業への満足感の潜在構造

質問 Q9, Q10, Q11 の3項目によって授業への満足感の潜在構造を推定しようとした。

Q9; あなたは学校で学ぶ数学があなた自身にとってかなりプラスになるといいますか。

Q10; あなたは学校で学んでいる数学に多少とも興味がありますか。

Q11; あなたは学校の数学の授業は概して親切に行なわれている方だと思いませんか。

表 4.5 数学の授業満足感の潜在構造分析基礎表

No.	反 応 型				反 応 頻 度		
	1 Q ₉	2 Q ₁₀	3 Q ₁₁	頻度	記号	頻度	反応率
1	+	+	+	84	n	504	1.00000
2	+	+	-	77	n_1	263	0.52183
3	+	-	+	35	n_2	234	0.46429
4	-	+	+	32	n_3	214	0.42460
5	+	-	-	67	n_{12}	161	0.31944
6	-	+	-	41	n_{13}	119	0.23611
7	-	-	+	63	n_{23}	116	0.23016
8	-	-	-	105	n_{123}	85	0.16667
計 n				504			

表 4.5 に示す通り 反応頻度に極端な 偏りもなく適当なように見受けられるが、質問 Q10 数学に対する興味の項目についての λ が 1 をこえて 推定不能となった。この質問群には予備調査の段階での見通しから予

備項目を設けていなかった。各項目に対する顕在反応のみで終わったことは所期の目的からして大変残念であった。原因については平凡なミスとしては、見通しの甘さから予備項目を設けなかったことであるが、最大の原因は質問項目設計が、調査対象の意向を十分くみあげ、潜在構造理論の仮定を満しうるに足る慎重さに欠けていた点にあると思われる。しかしこのことは、基本仮定である項目間の反応の統計的独立性を考えると、この仮定が満たされるように潜在クラスが分けられたと理解できるから、質問項目設計の段階でこの反応の独立性を理論的にチェックすることはむずかしい。また潜在連続体の存在についても同様に理解できるから、質問項目が当を得たものであるかどうかは分析可能かどうかにかかっていることになる。この意味で分析不可能なら質問設計は失敗であったと理解せざるをえない。慎重な質問設計をすることは言うまでもないが、予備項目をいくつか加えておくことによってほとんど避けられるものと思う。

十分慎重に設計された項目でも推定不能になる可能性があるという点では不便だが、逆に一見無関係と思われる項目間からでも構造の析出が可能であるという利点もあることがわかる。いずれにせよ推定の可否は質問項目の設計にかかっていることは確で、この分析から設計段階での予備調査のあり方の検討は勿論のこと、計量、社会、教育心理学等の理論の研究や経験などの必要性がうかがわれる。

5. あ と が き

以上、数学に対する意識、意欲の潜在構造分析に使用された手法の数理、計算手続、分析結果を解の得られなかったものも含めて述べて来た。このことから学生一般について数学に対する態度に関して結論を導くことは出来ないが、質問項目設計が理想的なものであったかどうかは別として、本校学生を対象として使用された質問項目の範囲内では、概ねつぎのようにまとめられると思う。

(1) 学生の数学に対する好意層は58.6%で、非好意層は41.4%位と推定できる。数字や数表への興味の項目がクラス分けに大きく作用している。

(2) 数学の学習意欲については意欲的な層が24.2%と低率で非意欲的な層の方が圧倒的に大きな割合をしめている。どの層に入るかは、学習内容の理解意識の有無によってだいたい判別できる。

ここで使用された解法は、質問項目が3で最小限の分析であるが、直観では得られない重要な情報を得る上において教育調査に十分活用できる有効な方法であ

と思われる。

分析から得られた資料をどのように教育面に利用するか、応用処理の方法をどのように拡張するか、質問項目設計上の技術的問題、推定不能な反応の検討などが今後の課題になると思う。

終りに臨み文献入手に際し多大な便宜を与えられた九州芸術工科大学池田一貞教授、有益な助言をいただいた苦小牧工業高等専門学校遠田晤良助教授、苦小牧工業高等専門学校数学教室に対し厚く感謝の意を表す。

参 考 文 献

- [1] Anderson, T. W. : On estimation of parameters in latent structure analysis. Psychometrika 19. 1954.
- [2] Anderson, T. W. : Some scaling models and estimation procedures in the latent class model. Probabilty and Statistics, ed by Grenander, U., Almqvist & Winksell, 1959.
- [3] Gibson, W. A. : An extension of Anderson's solution for the latent structure. Psychometrika, 20. 1955.
- [4] Green, B. F., Jr. : A general solution for the latent class model of latent structure analysis. Psychometrika, 16. 1951. (吉田正昭訳「計量心理学, リーディングス」誠信書房, 1968)
- [5] 池田一貞・西田春彦 : 「潜在構造分析 I」和歌山大学紀要. 1959.
- [6] 亀井裕治・葛城信彦 : 「潜在構造分析法におけるアンダーソンの解法の実験的検証」マスコミ統計研究録 vol. 4. No. 2. 1966.
- [7] 葛城信彦 : 「潜在構造分析法におけるラザースフェルトの方法とアンダーソンの方法の比較」マスコミ統計研究録 vol. 4. No. 1. 1966.
- [8] Lazarsfeld, P. F. : A conceptional introduction to latent structure analysis. ; in Mathematical thinking in the Social Sciences ; edited by P. F. Lazarsfeld, the Free Press, 1954.
- [9] 西田春彦・池田一貞 : 「潜在構造分析の理論と計算法」和歌山大学紀要. 1960.
- [10] 浦昭二・岡太彬訓 : 「潜在構造分析」数学セミナー vol. 8. No. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. 1969.

(昭和46年1月11日受理)