トポロジカル回路網解析と双対性

久　末　博　美*

Topological Network Analysis and The Duality.

Hiromi Hisasue

要　旨

本稿は，双対性という概念を通して，グラフを表現する行列として一般に用いられている接続行列に対応させて窓行列を考え，各種のグラフを表示する行列との関係，さらにそれに附随する回路網解析の関係を考察している。

Synopsis

In this paper, auther introduce to window matrix corresponde to incidene matrix, which is represent relation between the vertices and edges of a graph by the duality, and discuss these relation verious matrix and associated topological network analysis.

1. 序

グラフ理論で述べられるグラフとは，いくつかの点 (vertex) の集合と，それらの間を結ぶ単純曲線 (edge, or, arc) の集合からなる集合である。この図的感覚から " linear graph " なることばで表現されている。グラフは点と線の集合が有限か無限かによって，有限グラフと無限グラフに分けられ，又線に方向があるかないかで，有向グラフと無向グラフに分けられる。又グラフが平面に節点以外に交点をもたないで表わせる時，これを平面グラフといい，そうでない時，非平面グラフという。本文では主に有限無向平面グラフを取扱うことになる。

2. 双　対　性

電気回路に関する法則や記述は，電圧と電流，インピーダンスとアドミタンス，電圧源と電流源，タイセットとカットセット，などのように，多くの場合2つずつ対をなして現われる。これらの対応する概念は双対概念と呼ばれている。そしてこれらの概念はグラフの双対概念と密接に関係している。グラフの立場から考えると，2つの回路グラフは，もし一方のグラフのループを基準にした性質が他方のグラフの節点を基準にした性質と同じ形式の結果になれば，双対であるといわれる。

双対の概念を n 次元空間における回路という観点から考えると次のように述べることができる。n 次元空間を表現する方法としては，一般に一次元の線からなる n の軸が使用される。しかしもう1つの方法として，n の代りに2つの相互に直交する参照軸を考える方法がある。ただしこの軸は一次元の線ではなく，一般に多次元の超平面である。もし軸の1つが P 次元であれば，他の軸は $n-P$ 次元である。従って，n 次元空間がこのように表現されるなら，P 次元の超平面は P 次元回路を形成し，$n-P$ 次元の超平面は $n-P$ 次元の回路を形成する。かくして，一般に n 次元空間の領域では〝原始〟P 回路とその抽象的な参照機構として，〝双対〟$n-P$ 回路を所有することができる。

3次元空間においては，軸の1つは直線であり，他の軸はそれと垂直な平面である。2次元平面において，2つの軸は共に直線となり〝原始〟の回路グラフの双対も又，それと同質の回路グラフとなる。従って双対グラフは次のように平面グラフについて定義されるのである。

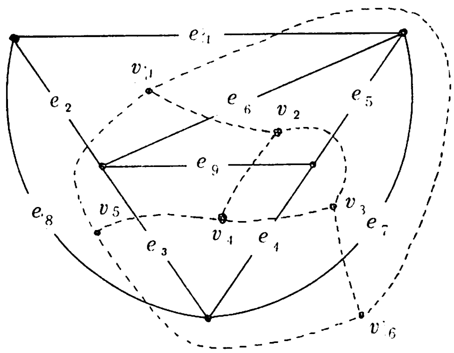
定　義

平面グラフ G が平面を領域 R_i $(i=1.2\cdots n)$ に分割している時，各領域内に点 R_i をとる。もし2つの領域 R_i，R_j が隣接しているなら，R_i と R_j の境界となっている G の辺を1回だけ切り，他の辺を切らないように点 P_i と P_j を結ぶ。又領域の境界となってい

＊ 助手　電気工学科

ないGの辺に対しては，自己ループを作る。このようにすると，頂点が $P_1\cdots P_n$ の新しいグラフ $\bar{G}$ ができる。これを G の双対グラフという。Gの双対グラフは元のグラフ G となる。

原始グラフ
G



双対グラフ
$\bar{G}$

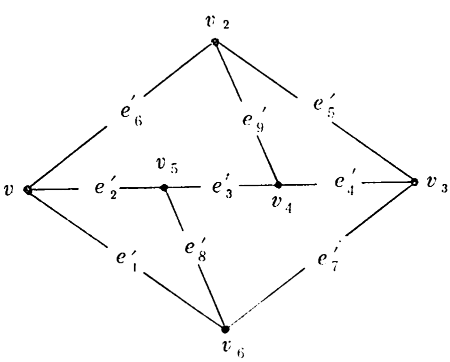


図　1

連結グラフにおいて，同じ点を2度通らないで，ある点 a から他の点 b までたどる辺の集合を道 (path) という。又これに対して，同じ領域を2度通らないで，ある領域 α から他の領域 β（外部領域も含む）へグラフの辺を横切って，たどって行く過程を迷路 (maze) と呼ぶ。結局これは，元のグラフ G の双対グラフ $\bar{G}$ で考えるところの道である。

以上述べたような双対の概念から，行列によるグラフの表現，そして回路網解析を論じて行くことができる。

3. グラフの行列

グラフを表現する行列としては，一般に接続行列，カットセット行列，タイセット（ループ）行列が用いられている。ここでは双対の概念から，平面グラフの点に対応するものとして，領域（窓）を囲む閉路を考え，接続行列と対応させて，窓行列を定義し，他の行列との関係を明確にしていく。

無向グラフにおける接続関係を表示する行列においては，接続するか否かの情報をそれぞれ“1”及び“0”で表わし，それらの間の演算は2法とする体において定義される算法を用いる。

和　$0+0=0$　　$1+1=0$
　　$0+1=1+0=0$

積　$0\cdot 0=0$　　$1\cdot 1=0$
　　$0\cdot 1=1\cdot 0=0$

（1） 各行列の定義

一般に用いられる接続行列，カットセット行列，タイセット行列は次のようなものである。ただし，点の数を v，辺の数を e，ループの数を ℓ，カットセットの数を K とする。

a）接続行列 incidence matrix.

$$A_a=[a_{ij}]_{v\times e}$$

$a_{ij}=1$　e_j が v_i と接続する。
$a_{ji}=0$　e_j が v_i と接続しない。

接続行列 A_a より1行（接地点）取り去った行列を接続部分行列 A とする。

$$A=[a_{ij}]_{(v-1)\times e}$$

接続行列は次のような性質をもっている。

1. 任意のグラフの接続行列におけるどの行列も2個の1を有する。

2. 2つのグラフ G_1, G_1 の接続行列をそれぞれ A_1, A_2 とする。もしいずれか一方の行と列を適当に置換して，他方の行列と一致する時，かつその時に限り G_1 と G_2 は合同である。

3. 連結グラフ G の接続行列 A_a の階数は G の階数 $R=v-1$ である。又接続行列 A_a から任意の行を1個取り去ってできる行列 A の階数も $R=v-1$ である。

4. 接続行列はグラフの接続から一意的に定まり，逆に接続行列からグラフの接続が一意に定まる。

b）タイセット行列 tie set matrix.

$$B_a=[b_{ij}]_{\times \ell e}$$

$b_{ij}=1$　e_j が l_i に含まれる。
$b_{ij}=0$　e_j が l_i に含まれない。

木 (tree) T を選べば，$(\partial-v+1)$ の T に関する基本ループができる。りれによる $e-v+1)\times e$ の行列を基本タイセット行列 B_f という。

B_f の第 i 行に対応する基本ループを決定している補木枝が第 i 列に対応するように列の置換を行えば，

次のように書ける。

$$B_f=[U_N.\ B_{fR}]_{(e-v+1)\times e}$$

ここで U_N は単位行列である。B_a の行より，任意に $(e-v+1)$ 行選んだ行列をループの部分行列 B とする。

$$B=[b_{ij}]_{(e-v+1)\times e}$$

タイセット行列は次のような性質をもっている。

1. 連結グラフ G のタイセット行列 B の階数はそのグラフの零度 $N=e-v+1$ に等しい。

2. 連結グラフ G の任意のループは，G の任意に選ばれた基本ループに属するいくつかに対して，ring. sum ⊕ の演算を行うことにより得られる。

c）カットセット行列 cutset matrix.

$$C_a=[C_{ij}]_{K\times e}$$

$C_{ij}=1$　e_j が K_i に含まれる。

$C_{ij}=0$　e_j が K_i に含まれない。

木Tを選べば，$(v-1)$ の T に関する基本カットセットができる。これによる $(v-1)\times e$ の行列を基本カットセット行列 C_f という。

C_f において，カットセット K_i に含まれる T の枝が，第 $e-v+1+i$ 番目の列となるように配列すれば次のように書ける。

$$C=[C_{fN}.\ U_R]$$

ここでは U_R 単位行列である。C_a の行より任意に $(v-1)$ 行選んだ行列をカットセット部分行列とする。

$$C=[C_{ij}]_{(v-1)\times e}$$

カットセット行列は次のような性質をもっている。

1. 連結グラフ C のカットセット行列 C の階数は $v-1$ である。

2. 連結グラフ G の任意のカットセットは G の任意に選ばれた基本カットセットに属するいくつかのカットセットに ring sum ⊕ の演算を行うことにより得られる。

（2） 窓行列の定義

次に第4番目の行列として，窓行列（window matrix）を以下のように定義する。

$$D_a=[d_{ij}]_{w\times e}$$

$d_{ij}=1$　e_i が w_i の周に含まれる。

$d_{ij}=0$　e_j が w_i の周に含まれない。

ここで $w=$ 窓の数＋1（外周）である。

窓行列 D_a より1行（基準ループ）取り去った行列を窓部分行列 D とする。

$$D=[d_{ij}]_{(w-1)\times e}$$

窓行列は次のような性質をもつ。

1. 平面連結グラフにおける窓行列 D_a はどの行列も2個の1を有する。

2. 2つのグラフ G_1, G_2 の窓行列を D_1, D_2 とする。いずれか一方の行と列を適当に置換して，他方の行列と一致する時，G_1 と G_2 は合同（1同型）又は等価（2同型）である。

3. 窓行列において，窓の総数 $w-1$ は，独立なループの数 $e-v+1$ に等しい。

4. 平面描写したグラフから，窓行列は一意に定まるが。窓行列からグラフは一意に定まらない。しかし2同型の範囲においては，一意に定まる。

（3） 各行列の相互関係 (1)

以下のように4つの行列を定義すると，各行列の相互関係は，AB 間，BC 間の関係すなわち $A_aB_a{}^t=0$. $B_aC_a{}^t=0$ と同様な CD 間，DA 間の関係が見出される。

1. グラフ G のカットセット行列 C_a と窓行列 D_a の第 i 行が同一の枝に対応するように配列されている時，次式が成立つ。

$$C_aD_a{}^t=0 \qquad D_aC_a{}^t=0$$

ここで t は転置行列を表現する。

〔証　明〕

$$C_aD_a{}^t=P=[P_{ij}] \text{ とおくと}$$

$$P_{ij}=\sum_{k=1}^{e}C_{ik}d_{kj}^{t}=C_{1i}d_{1i}^{t}+C_{i2}d_{2j}^{t}+\cdots\cdots+C_{ie}d_{ej}^{t}$$

C_a の i 行はカットセット K_i を，$D_a{}^t$ の j 列は w_i の周を意味している。カットセットはグラフを2つに分けるから，K_iは w_j を分けるか，又は分けないかのいずれかである。K_i が w_j を分ける場合，K_i と w_j の共通する辺の数は偶数である。K_i が w_j を分けない場合，K_i と w_j の共通する辺の数は0である。従って，いずれの場合にも総和は0となり

$$P_{ij}=0$$

$$\therefore\ C_aD_a{}^t=0$$

$$(C_aD_a{}^t)^t=(D_a{}^t)C_a{}^t=D_aC_a{}^t=0$$

2. グラフ G の接続行列 A_a と窓行列 D_a の第 i 列が同一の枝に対応するように配列されている時，次式が成立つ。

$$A_aD_a{}^t=0 \qquad D_aA_a{}^t=0$$

〔証　明〕

$$A_aD_a{}^t=P=[P_{ij}] \text{ とおくと}$$

$$P_{ij}=\sum_{k=1}^{e}a_{ik}d_{kj}^{t}=a_{i1}d_{1j}^{t}+a_{i2}d_{2j}^{t}+\cdots\cdots a_{ie}d_{ej}^{t}$$

A_a の i 行は v_i の頂点，$D_a{}^t$ の j 列は w_j の周を意

味している。v_i が w_j に含まれるなら，共通する辺の数は2となり，非零の頂が2つある。v_i が w_j にまれなければ，共通する辺の数は0となり，非零の頂がない。従って，いずれの場合にも総和は0となり

$$P_{ij}=0$$

$$\therefore\ A_aD_a^t=0$$

$$(A_aD_a^t)^t=(D_a^t)^tA_a^t=D_aA_a^t=0$$

以上の関係をまとめてみると，図2のようになる。

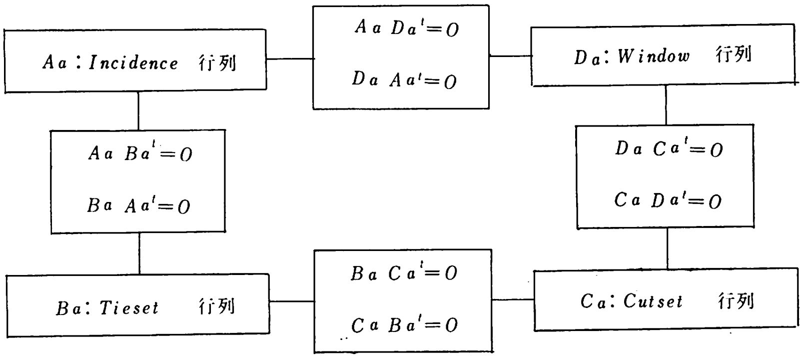


図 2

（4） 各行列の相互関係 (2)

連結グラフ G の A_a, B_a, C_a, D_a において，それらの第 i 列が共に同一の枝に対応し，かつ最初の N の列をある木 T の補木枝に，残りの R 列を T の枝にそれぞれ対応するように配列し，かつ B_a の最初の N 行からなる部分行列が T に関する B_f に，又 C_a の最初の R 行からなる部分行列が T に関する C_f になるように，それぞれ行の置換を行うと，各行列は次のように書ける。ただし，$N=e-v+1$, $R=v-1$ である。

$$A_a=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & R \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} R \\ 1 \end{array} \qquad D_a=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & R \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c} D_{11} & D_{12} \\ \hdashline D_{21} & D_{22} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} N \\ 1 \end{array}$$

$$C_a=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} N & R \end{array} \\ \left(\begin{array}{c:c} C_{11} & U_R \\ \hdashline C_{21} & C_{22} \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} R \\ \ \end{array} \qquad B_a=\left(\begin{array}{c:c} U_N & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right)\begin{array}{c} N \\ \ \end{array}$$

従って，これらの行列の上半部をとれば，それぞれ A, D, C_f, B_f となり，これらを次のように置く。

$$A=[A_L.\ A_T] \qquad B_f=[U_N.\ B_{fN}]$$

$$D=[D_L.\ D_T] \qquad C_f=[C_{fN}.\ U_R]$$

ここで，C_{fN}, B_{fR}, A_T, D_L は非特異で，逆行列が存在するものとする。

以上のような定義をすると，A と C_f の関係すなわち $C_f=A_T^{-1}A$ と同様な D と B_f の関係が見出される。

「窓部分行列 D と基本タイセット行列 B_f の間には，$B_f=D_L^{-1}\cdot D$ の関係がある」。

〔証　明〕

$$D\cdot C_f^t=[D_L\cdot D_T]\begin{pmatrix} C_{fN}^t \\ U_R^t \end{pmatrix}=0$$

$$D_LC_{fN}^t+D_TU_R^t=0$$

$$U_R^t=1 \qquad D_LC_{fN}^t+D_T=0$$

$$1+1=0 \qquad D_LC_{fN}^t=D_T$$

両辺に D_L^{-1} を乗じ　$C_{fN}^t=D_L^{-1}D_T$

$C_{fN}=B_{fR}^t$ より　$B_{fR}=C_{fN}^t$

$$\therefore\ B_{fR}D_L^{-1}D_L$$

$$\therefore\ B_f=[U_N\cdot C_{fN}^t]=[U_N\cdot D_L^{-1}\cdot D_T]=D_L^{-1}\cdot D$$

以上の関係をまとめてみると，図3のようになる。

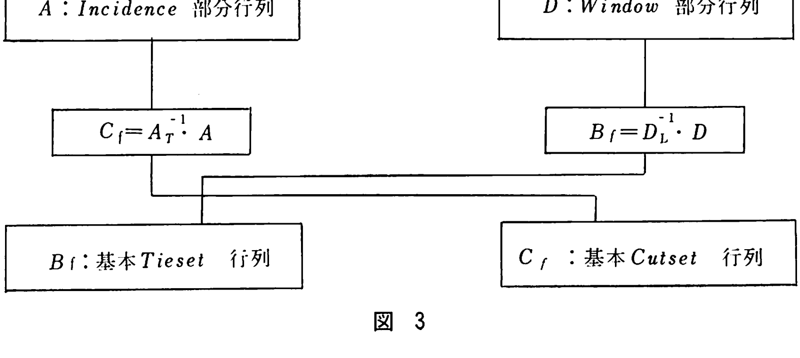


図 3

4. 回路網解析

回路網解析の手法としては，節点解析，ループ解析（タイセット解析），カットセット解析が主に知られているが，ここでは，先に取扱った窓行列を用いて，節点解析と対応すべき解析を考える。

(1) 電圧と電流の定義

一般にいうループ電流と節点対電圧が双対関係にあり，双対接地点電位には，領域の周囲を回る電流が対応している。従ってループ電流は正確には，領域電流ともいうことができる。これらを正確に定義しなおすならば次のようになる。

a）節点対電圧 v'

2つの節点の電位差であり，節点対を結ぶ道に沿う木電圧の代数和となる。

b）領域対電流 i'

2つの領域電流の差であり領域を連ねる迷路の補木電流の代数和となる。

c）節点電位 v''

対接地点電位であり，接地点の電位とその節点の電位の差である。

d）領域電流 i''

グラフの外周（基準ループ）を回る基準領域電流とその領域の周囲を回る電流の差である。

(2) 電流と電圧の変換

a）カットセット変換

キルヒホッフの電圧則から

$$B_f v=0$$

枝電圧 v は

$$v=\begin{pmatrix} v_L \\ v_T \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L: \text{cotree} \\ T: \text{tree} \end{matrix}$$

$$[U_N \cdot B_{fR}]\cdot\begin{pmatrix} v_L \\ v_T \end{pmatrix}=v_L+B_{fR}v_T=0$$

$$v_L=B_{fR}v_T=C_{fN}{}^t\cdot v_T$$

$$\therefore\ v=\begin{pmatrix} v_L \\ v_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{fN}{}^t \\ U_R{}^t \end{pmatrix}v_T=C_f{}^t\cdot v_T$$

従って，木 T の枝電圧が与えられれば，全ての枝電圧が定まる。

一般には，

$$v=C^t v'$$

C: カットセット部分 行列 $(v-1)\times e$

v': 節点対電圧 $(v-1)$ 行

これをカットセット変換という。

b）節点変換

C の代りとして，接続行列 A_a から，接地点に相当する節点の行を除いた $(v-1)\times e$ の行列を用いると。

$$v=A^t v''$$

A: 接続部分行列 $(v-1)\times e$

v'': 節点電位 $(v-1)$ 行

これを節点変換という。

c）タイセット変換

キルヒホッフ電流則から。

$$C_f i=0$$

枝電流 i は

$$i=\begin{pmatrix} i_L \\ i_T \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L: \text{補木} \\ T: \text{木} \end{matrix}$$

$$[C_{fN}\cdot U_R]\begin{pmatrix} i_L \\ i_T \end{pmatrix}=C_{fN}\cdot i_L+i_T=0$$

$$i=C_{fN}\cdot i_L=B_{fR}{}^t i_L$$

$$\therefore\ i=\begin{pmatrix} i_L \\ i_T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} U_N{}^t \\ B_{fR}{}^t \end{pmatrix}i_L=B_f{}^t\cdot i_L$$

従って，補木 L の枝電流が与えられれば，全ての枝電流が定まる。

一般には

$$i=B^t i'$$

B: タイセット部分行列 $(e-v+1)\times e$

i': 領域対電流 $(e-v+1)$ 行

これをタイセット変換という。

d）領域変換

Bの代りとして，窓行列 D_a より外周（基準ループ）に担当する行を除いた $(e-v+1)\times e$ の行を列用いると，次のように書ける。

$$i=D_t i''$$

D: 窓部分行列 $(e-v+1)\times$e

i'': 領域電流

これを領域変換とよぶことにする。

(3) 回路網解析

以上から，回路解析は一般に以下のように述べることができる。

回路網解析とは，

1. 行列 A, B, C, D を決定できる回路網
2. インピーダンス行列 Z, 又はアドミッタンス行列Y
3. 電圧源ベクトル E と電流源ベクトル I を与えて，

枝電圧 v（未知数 e），枝電流（未知数 e）を求めることである。

回路網が電流源だけからなるカットセットと電圧源だけからなるタイセットをもたない時，全ての電流源の枝を補木に，全ての電圧源の枝を木に含めることができる。

第1段階として，キルホッフの法則から，

$A\ i=0$　　$(v-1)$ ……………………… (1)

$B\ v=0$　　$(e-v+1)$ …………………… (2)

$C\ i=0$　　$(v-1)$ ……………………… (3)

$D\ v=0$　　$(e-v+1)$ …………………… (4)

ここでかっこ内は方程式の数である。

第2段階として，次の変換を行うことが，できる。

$v=A^t v''$　　$(e-v+1)$ …………………… (5)

$i=B^t i'$　　$(v-1)$ ……………………… (6)

$v=C^t v'$　　$(e-v+1)$ …………………… (7)

$i=D^t i''$　　$(v-1)$ ……………………… (8)

枝の電圧電流性，すなわちオームの法則から，

$v=Zi+E$　　(e) ……………………… (9)

$i=Yv+I$　　(a) ……………………… (10)

回路網解析は，結局これらの連立方程式を解くことである。

a）節点解析

(1)，(5)，(9)式より，$i=YA^t v''+I$

A を両辺に乗じて，

$$Ai=AYA^t v''+AI$$

$Ai=0$ より

$$AYA^t v''+AI=0$$

$$\therefore\ v''=(AYA^t)^{-1}(-AI)$$

b）タイセット解析

(2)，(6)，(10)式より，

$$v=ZB^t i'+E$$

B を両辺に乗じて，

$$Bv=BZB^t i'+BE$$

$Bv=0$ より

$$BZB^t i' BE=0$$

$$\therefore\ i'=(BZB^t)^{-1}\cdot(-BE)$$

c）カットセット解析

(3)，(7)，(9)式より，

$$i=YC^t v'+I$$

C を両辺に乗じて

$$Ci=CY^t v'+CI$$

$Ci=0$ より

$$CYC^t v'+CI=0$$

$$\therefore\ v'=(CYC^t)^{-1}(-CI)$$

d）領域解析

(4)，(8)，(10)式より，

$$v=ZD^t i''+E$$

D を両辺に乗じて，

$$Cv=DZD^t i''+DE$$

$Dv=0$ より

$$DZD^t i''+DE=0$$

$$\therefore\ i''=(DZD^t)^{-1}(-DE)$$

5. 結　び

グラフ理論の有力性というものを考えた場合，1つに，ある理論をグラフ理論の適用によって，美しく体系づけることができるという点があげられる。すなわち解法の手段としてよりも，理解の手段としての有効性が考えられる。本文においても，一貫した流れ，すなわち双対の概念を通して，グラフを表現する行列と，回路網解析を理論体系に主眼を置いて考察した。

参考文献

1） 久末，安田「双対性によるトポロジカル解析の考察(1)，(2)」45年度電気四学会北海道支部大会。

2） S. P. Chan「Introductory Topological Analysis of Electrical Network」Holt. Rinehart. Winston (1969)

3） E. A. Gullmin「Introductory Circuit Theory」Wiley (1953)

（昭和47年1月10日受理）