

ヒンデ結合された棒状要素による 平面構造応力解析について

能 町 純 雄*
松 岡 健 一**
沢 田 知 之***

On Stress Analysis in a Plane Structure Made of
Hinge Connected Bar Elements.

Sumio. G NOMACHI
Kenichi MATSUOKA
Tomoyuki SAWADA

要 旨

本稿は棒状要素がスパン方向にヒンデ結合された平面構造物の応力挙動を、偏微分、偏差分方程式で表わし、フーリエ定和分変換を用いて解析し、理論値と実験値の検討を行なったものである。

Synopsis

In this paper, the stress behaviour of the plane structure made of bar elements which are connected with one another, by longwise hinge, is described in partial differential and partial difference equations, and the equations are solved by means of Fourier Integration Trans forms. The analytical results are compared with the experimental ones in the case of acrylite cylindrical bar element.

1. 本解析の概要、特長および目的

本論ではスパン方向にヒンデで結合された棒状要素による平面構造を取り上げた。従来、この種の構造物の合理的解析方法は見あたらない。本解析にあたっては棒要素の断面変形は考慮せず、また棒要素は弾性床にあると仮定する。要素における鉛直変位、軸廻りの回転変位を鉛直力と、捻りモーメントのつり合いから求め、ヒンデ接合点での力のつり合いを満足するように誘導された微分差分方程式をスパン直角方向は、フーリエ定和分変換を行ない、スパン方向には有限フーリエ変換を行なって解析を進める。また、棒要素の曲げには、弾性床上の梁の基本微分方程式を用い、捻れには普通の捻れ式を用いて、未知数をすべて変位で表

わすようにしている。フーリエ変換およびフーリエ定和分変換を行ない、境界条件を考慮することにより、問題は2元の連立方程式に帰着する。逆変換は級数解で与えられるが、その級数解が閉じた形で表われるので、大きなマトリックス演算の必要もなく、繰り返し計算による収束性を考慮する必要もなく短時間の計算で解を求めることができる。この種の構造物は基礎工にしばしば見ることができるが、石狩工河川橋の側径間部における大口径鋼管平行組グレイエ法ないはその一例である。

2. スパン方向にヒンデ結合された円筒形棒状要素の解析

図-1の如くの棒状要素 $r, r+1$ に対して、曲げのみに関与する qr' 、捻りのみに関与する qr'' を考えることにより次式が誘導される。

* 教授 北海道大学 工学部 土木工学科

** 助教授 室蘭工業大学 土木工学科

*** 助手 苫小牧工業高等専門学校 土木工学科

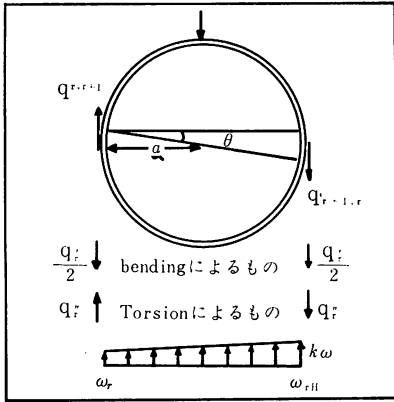


図 1

〈曲げによるもの〉

$$EI \cdot \frac{w_{r+1}(x) + w_r(x)}{2} = q_r' - \frac{w_{r+1}(x) + w_r(x)}{2} \times K \quad (1)$$

$$\begin{aligned} q_{r,r+1} = & \frac{K}{12} \{w_{r+1}(x) - w_r(x)\} - \frac{GJ}{4a^2} \{\ddot{w}_{r+1}(x) - \ddot{w}_r(x)\} \\ & - \frac{K}{4} \{w_{r+1}(x) + w_r(x)\} - \frac{EI}{4} \{\ddot{w}_{r+1}(x) + \ddot{w}_r(x)\} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} q_{r,r-1} = & \frac{K}{12} \{w_r(x) - w_{r-1}(x)\} - \frac{GJ}{4a^2} \{\ddot{w}_r(x) - \ddot{w}_{r-1}(x)\} \\ & + \frac{K}{4} \{w_{r+1}(x) + w_{r-1}(x)\} + \frac{EI}{4} \{\ddot{w}_r(x) + \ddot{w}_{r-1}(x)\} \end{aligned} \quad (6)$$

よって(5), (6)式を節点条件 $q_{r,r-1} - q_{r,r+1} = 0$ に代入することにより

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{4} \{\ddot{w}_{r+1}(x) + 2\ddot{w}_r(x) + \ddot{w}_{r-1}(x)\} + \frac{K}{4} \{w_{r+1}(x) + 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\} \\ & + \frac{GJ}{4a^2} \{\ddot{w}_{r+1}(x) - 2\ddot{w}_r(x) + \ddot{w}_{r-1}(x)\} - \frac{K}{12} \{w_{r+1}(x) - 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\therefore \frac{EI}{4} \{\Delta^2 w_{r-1}(x) + 4\ddot{w}_r(x)\} + \frac{GJ}{4a^2} \Delta \ddot{w}_{r-1}(x) + \frac{K}{6} \Delta^2 w_{r-1}(x) + K \cdot w_r(x) = 0 \quad (8)$$

ここで

$$\Delta w_r(x) = w_{r+1}(x) - w_r(x)$$

$$\Delta^2 w_r(x) = \Delta \{\Delta w_r(x)\} = w_{r+2}(x) - 2w_{r+1}(x) + w_r(x)$$

なる差分式を表わす。

よって(8)式に次に示す如くの Fourier-sine 定和変換を行なう

$$\tilde{w}_i(x) = \sum_{r=1}^{n-1} w_r(x) \cdot \sin \frac{i\pi r}{n}, \quad \tilde{P}_i = \sum_{r=1}^{n-1} P_r \cdot \sin \frac{i\pi r}{n} \quad \text{とおく。}$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} \Delta^2 f(r-1) \cdot \sin \frac{i\pi r}{n} = -\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot f(n) - f(0)\} - D_i \sum_{r=1}^{n-1} f(r) \cdot \sin \frac{i\pi r}{n} \quad (9)$$

$$D_i = 2 \cdot (1 - \cos \frac{i\pi}{n})$$

故に(8)(9)式より整理すると

〈捻りによるもの〉

$$\begin{aligned} GJ \cdot \frac{\ddot{w}_{r+1}(x) - \ddot{w}_r(x)}{2a} \\ = -2a \cdot q_r' + \frac{K \cdot a}{6} \{w_{r+1}(x) - w_r(x)\} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで EI : ($\text{kg} \cdot \text{cm}^2$) 曲げ剛性

GJ : 捻り剛性 ($\text{kg} \cdot \text{cm}^2$)

k : 地盤反力係数 (kg/cm^3)

w : たわみ (cm)

K : $2 \cdot a \cdot k$ (kg/cm^2)

a : 管半径 (cm)

故に

$$q_{r,r+1} = q_r'' - \frac{q_r'}{2} \quad (3)$$

$$q_{r-1,r} = q_r'' + \frac{q_r'}{2} \quad (4)$$

の関係から $q_{r,r+1}$, $q_{r,r-1}$ を $w(x)$ で表わすと、

$$\begin{aligned}
\therefore & \frac{EI}{4} \cdot \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot w_n(x) - w_0(x)\} + (4-D_i) \cdot \tilde{w}_i(x) \right] \\
& + \frac{GJ}{4a^2} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot \ddot{w}_n(x) - \ddot{w}_0(x)\} - D_i \cdot \ddot{\tilde{w}}_i(x) \right] \\
& + \frac{K}{6} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot w_n(x) - w_0(x)\} + (6-D_i) \cdot \tilde{w}_i(x) \right] = 0
\end{aligned} \tag{10}$$

ここで、さらに(10)式に Fourier-sine 変換を行なうと、

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell (10) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx &= \int_0^\ell \left(\frac{EI}{4} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot w_n(x) - w_0(x)\} + (4-D_i) \cdot \tilde{w}_i(x) \right] \right. \\
& + \frac{GJ}{4a^2} \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot \ddot{w}_n(x) - \ddot{w}_0(x)\} - D_i \cdot \ddot{\tilde{w}}_i(x) \right] + \frac{K}{6} \cdot \left[-\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i \cdot \ddot{w}_n(x) - \ddot{w}_0(x)\} \right. \\
& \left. \left. + (6-D_i) \cdot \tilde{w}_i(x) \right] \right) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

(11)式において次の(12)(13)式を用いる。

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx &= \left[-\left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot f''(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell} x \right]_0^\ell \\
& + \left[\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^3 \cdot f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell} x \right]_0^\ell + \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^4 \cdot \int_0^\ell f(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx &= \left[-\left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{\ell} x \right]_0^\ell \\
& - \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 \cdot \int_0^\ell f(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx
\end{aligned} \tag{13}$$

よって(12)(13)式を(11)式に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{EI}{4} (D_i - 4) \cdot \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) - D_i \frac{GJ}{4a^2} \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 - \frac{K}{6} (6 - D_i) \right\} \cdot w_{im} = \\
& \frac{EI}{4} (-1)^i \cdot S_i \left(-\frac{m\pi}{\ell}\right) \{ \ddot{w}_n(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{w}_n(0) \} - \frac{EI}{4} (-1)^i \cdot S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^3 \cdot \{ w_n(\ell) \cdot (-1)^m \\
& - w_n(0) \} - \frac{EI}{4} (-1)^i \cdot S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^4 \cdot w_{nm}(x) - \frac{EI}{4} S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot \{ \ddot{w}_0(\ell) \cdot (-1)^m \\
& - \ddot{w}_0(0) \} + \frac{EI}{4} \cdot S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^4 w_{0m}(x) + \frac{EI}{4} S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^3 \cdot \{ w_0(\ell) \cdot (-1)^m - w_0(0) \} \\
& + \frac{EI}{4} D_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \{ \ddot{\tilde{w}}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{\tilde{w}}_i(0) \} - \frac{EI}{4} D_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^3 \cdot \{ \tilde{w}_i(\ell) \cdot (-1)^m \\
& - \tilde{w}_i(0) \} - EI \cdot \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \{ \ddot{\tilde{w}}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \ddot{\tilde{w}}_i(0) \} + \frac{GJ}{4a^2} (-1)^i \cdot S_i \left(-\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot w_{nm}(x) \\
& + EI \cdot \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^3 \cdot \{ \tilde{w}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \tilde{w}_i(0) \} + \frac{GJ}{4a^2} (-1)^i \cdot S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot \{ w_n(\ell) \cdot (-1)^m \\
& - w_n(0) \} - \frac{GJ}{4a^2} \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot S_i \{ w_0(\ell) \cdot (-1)^m - w_0(0) \} - \frac{GJ}{4a^2} \cdot S_i \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2 \cdot w_{0m}(x) \\
& + \frac{GJ}{4a^2} D_i \cdot \left(\frac{m\pi}{\ell}\right) \cdot \{ \tilde{w}_i(\ell) \cdot (-1)^m - \tilde{w}_i(0) \} - \frac{K}{6} S_i \cdot (-1)^i w_{nm} + \frac{K}{6} S_i \cdot w_{0m}
\end{aligned} \tag{14}$$

ここで

$$S_i = \sin \frac{i\pi}{n} \quad D_i = 2 \cdot \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n} \right)$$

$$w_{im}(x) = \int_0^\ell \tilde{w}_i(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x$$

$$w_{0m}(x) = \int_0^\ell w_0(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x$$

$$w_{nm}(x) = \int_0^\ell w_n(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \quad \text{である。}$$

3. 境界条件

ここで $r=0$, および $r=m$ で要素にそって単純支持された場合について考えると, $x=0$ で自由端スパン長を ℓ , 棒要素数を n とする。また ℓ 端では固定にすると,

$$w_o(x) = w_n(x) = 0 \quad (15)$$

$$\ddot{w}_o(x) = \ddot{w}_n(x) = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{w}_r(0) = w_r(\ell) = 0 \quad (17)$$

$x=0$ 端での剪断力のつり合いは

$$Q_{r,r-1}(0) - Q_{r,r+1}(0) + P_r = 0 \quad (18)$$

(18) を Fourier-sine 定積分変換して整理すると,

$$\frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot \ddot{\tilde{w}}_i(0) - \frac{GJ}{4a^2} \cdot D_i \cdot \dot{\tilde{w}}_i(0) = \dot{P}_i, \quad \dot{P}_i = \sum P_r \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (19)$$

$x=\ell$ 端でたわみ角 $=0$ であることより

$$\dot{w}(\ell) = 0 \quad (20)$$

よって(14)から w_{im} を求め Fourier-sine 逆変換を行ない(15), (16), (17)の諸条件を考慮し, (19)(20)の式から境界値 $\tilde{w}_i(0)$, $\ddot{\tilde{w}}_i(\ell)$ が求められることにより $\tilde{w}_i(x)$ は次の如く示される。

$$\therefore \tilde{w}_i(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} w_{im}(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x = F(x) \cdot \ddot{\tilde{w}}_i(\ell) + G(x) \cdot \tilde{w}_i(0) + S(x) \cdot \tilde{P}_i \quad (21)$$

ここで $F(x)$, $G(x)$ および $S(x)$ は, 次の如くである。

1. 荷重が $x=0$ 端に作用する場合

1-1 実数解の場合, 即ち(14)式における w_{im} の係数項の4次式が実数根 $a^2 = A + \sqrt{A^2 - B}$ $b^2 = A - \sqrt{A^2 - B}$

なるとき, $A = \frac{GJ \cdot \ell^2 D_i}{2EI \cdot a^2 \pi^2 (4 - D_i)}$, $B = \frac{2(6 - D_i) \cdot K \ell^4}{3(4 - D_i) EI \pi^4}$

$$F(x) = \frac{\ell^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2} \cdot \frac{\sinh \frac{a\pi}{\ell} x}{\sinh a\pi} + \frac{\ell^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sinh \frac{b\pi}{\ell} x}{\sinh b\pi} \quad (22)$$

$$G(x) = \frac{2A - a^2}{b^2 - a^2} \times \frac{\sinh a\pi(1 - \frac{x}{\ell})}{\sinh a\pi} + \frac{b^2 - 2A}{b^2 - a^2} \times \frac{\sinh b\pi(1 - \frac{x}{\ell})}{\sinh b\pi} \quad (23)$$

$$S(x) = 0 \quad (24)$$

1-2 複素数解の場合, 即ち 1-1 ににおいて, $A^2 - B < 0$ となる時で, $A = \frac{GJ \cdot \ell^2 D_i}{2EI a^2 \pi^2 (4 - D_i)}$ $B = \frac{2(6 - D_i) K \ell^4}{3(4 - D_i) EI \cdot \pi^4}$

で $\alpha + \beta i$ なる複素数根である時,

$$F(x) = \frac{-\ell^2}{2\pi^2 \alpha \beta} \cdot P\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad (25)$$

$$G(x) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \cdot P\left(\frac{x}{\ell}\right) + Q\left(\frac{x}{\ell}\right) \quad (26)$$

$$S(x) = 0 \quad (27)$$

ここで

$$P\left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{\sinh \alpha \pi \left(2 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \sin \beta \pi \frac{x}{\ell} - \sinh \alpha \pi \cdot \frac{x}{\ell} \times \sin \beta \pi \left(2 - \frac{x}{\ell}\right)}{\cosh 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi} \quad (28)$$

$$Q\left(\frac{x}{\ell}\right) = \frac{\cosh \alpha \pi \left(2 - \frac{x}{\ell}\right) \cdot \cos \beta \pi \frac{x}{\ell} - \cosh \alpha \pi \cdot \frac{x}{\ell} \cdot \cos \beta \pi \left(2 - \frac{x}{\ell}\right)}{\cosh 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi} \quad (29)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{A+2C}}{2} \quad \beta = \frac{\sqrt{2C-A}}{2} \quad C = \sqrt{B}$$

2. 荷重が要素の任意点に作用する場合

2-1 実数解の場合

$F(x)=1-1$ と同様

$G(x)=1-1$ と同様

$\xi_1 > \xi$ の時

$$S(x) = \frac{2\ell^4}{EI \cdot \pi^2(4-D_i)} \left\{ \frac{1}{a^2-b^2} \cdot \frac{\sinh a\pi\xi \cdot \sinh a\pi(1-\xi_1)}{\pi a \cdot \sinh a\pi} + \frac{1}{b^2-a^2} \cdot \frac{\sinh b\pi\xi \cdot \sinh b\pi(1-\xi_1)}{\pi b \cdot \sinh b\pi} \right\} \quad (30)$$

$\xi_1 < \xi$ の時

$$S(x) = \frac{2\ell^4}{EI \cdot \pi^2(4-D_i)} \cdot \left\{ \frac{1}{a^2-b^2} \cdot \frac{\sinh a\pi\xi_1 \cdot \sinh a\pi(1-\xi)}{\pi a \cdot \sinh a\pi} + \frac{1}{b^2-a^2} \cdot \frac{\sinh b\pi\xi_1 \cdot \sinh b\pi(1-\xi)}{\pi b \cdot \sinh b\pi} \right\} \quad (31)$$

2-2 複素数解の場合

$F(x)=1-2$ と同様

$G(x)=1-2$ と同様

$$S(x) = \frac{\ell^3}{EI \cdot \pi^3 \cdot \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \cdot (D_i - 4)} \cdot \{\alpha \cdot \Psi(\xi, \xi_1) + \beta \cdot \phi(\xi, \xi_1)\} \quad (32)$$

$$\xi = \frac{x}{\ell}, \quad \xi_1 = \frac{C}{\ell}, \quad C: \text{荷重位置}$$

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \xi_1) = & \frac{1}{\cosh 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi} \cdot \{\sinh \alpha \pi (2 + \xi - \xi_1) \cdot \cos \beta \pi (\xi_1 - \xi) \\ & - \sinh \alpha \pi (2 - \xi - \xi_1) \cdot \cos \beta \pi (\xi_1 + \xi) + \sinh \alpha \pi (\xi_1 - \xi) \cdot \cos \beta \pi (2 + \xi - \xi_1) \\ & - \sinh \alpha \pi (\xi_1 + \xi) \cdot \cos \beta \pi (2 - \xi - \xi_1)\} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \xi_1) = & \frac{1}{\cosh 2\alpha \pi - \cos 2\beta \pi} \cdot \{\cosh \alpha \pi (2 + \xi - \xi_1) \cdot \sin \beta \pi (\xi_1 - \xi) \\ & - \cosh \alpha \pi (2 - \xi - \xi_1) \cdot \sin \beta \pi (\xi_1 + \xi) + \cosh \alpha \pi (\xi_1 - \xi) \cdot \sin \beta \pi (2 + \xi - \xi_1) \\ & - \cosh \alpha \pi (\xi_1 + \xi) \cdot \sin \beta \pi (2 - \xi - \xi_1)\} \end{aligned} \quad (34)$$

ここで $\phi(\xi, \xi_1)$, $\Psi(\xi, \xi_1)$ において $\xi_1 > \xi \rightarrow \xi(1-\xi_1)$, $\xi \geq \xi_1 \rightarrow \xi_1(1-\xi)$

また (19) (20) において,

1-1, 2-1 の場合

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i(0) = & \left\{ \frac{\pi a^3}{\ell(a^2-b^2)} \cdot \frac{1}{\sinh a\pi} + \frac{\pi b^3}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{1}{\sinh b\pi} \right\} \cdot \ddot{w}_i(\ell) \\ & + \left\{ -\frac{a^3 \pi^3 (2A-a^2)}{\ell^3(b^2-a^2)} \cdot \frac{\cosh a\pi}{\sinh a\pi} - \frac{b^3 \pi^3 (b^2-2A)}{\ell^3(b^2-a^2)} \cdot \frac{\cosh b\pi}{\sinh b\pi} \right\} \cdot \ddot{w}_i(0) \end{aligned}$$

2-1. $\xi_1 > \xi$

$$+ \left[\frac{2\ell^4}{EI \cdot \pi^2(4-D_i)} \cdot \left\{ \frac{a^2 \pi^2}{\ell^3(a^2-b^2)} \cdot \frac{\sinh a\pi(1-\xi_1)}{\sinh a\pi} + \frac{b^2 \pi^2}{\ell^3(b^2-a^2)} \cdot \frac{\sinh b\pi(1-\xi_1)}{\sinh b\pi} \right\} \right] \cdot \bar{P}_i$$

2-1. $\xi_1 < \xi$

$$+ \left[\frac{2\ell^4}{EI \cdot \pi^2(4-D_i)} \cdot \left\{ \frac{-a^2\pi^2}{\ell^3(a^2-b^2)} \cdot \frac{\sinh a\pi\xi_1 \cosh a\pi}{\sinh a\pi} + \frac{-b^2\pi^2}{\ell^3(b^2-a^2)} \cdot \frac{\sin b\pi\xi_1 \cdot \cosh b\pi}{\sinh b\pi} \right\} \right] \cdot \tilde{P}_i \quad (35)$$

$$\dot{w}_i(0) = \left\{ \frac{a\ell}{\pi} \cdot \frac{1}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{\sinh a\pi} + \frac{b\ell}{\pi} \cdot \frac{1}{b^2-a^2} \cdot \frac{1}{\sinh b\pi} \right\} \cdot \ddot{w}_i(\ell)$$

$$+ \frac{a\pi(2A-a^2)}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{\cosh a\pi}{\sinh a\pi} + \frac{b\pi(b^2-2A)}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{\cosh b\pi}{\sinh b\pi} \cdot \tilde{w}_i(0)$$

2-1. $\xi_1 > \xi$

$$+ \left[\frac{2\ell^4}{EI\pi^2(4-D_i)} \left\{ \frac{1}{\ell(a^2-b^2)} \cdot \frac{\sinh a\pi(1-\xi_1)}{\sinh a\pi} + \frac{1}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{\sinh b\pi(1-\xi_1)}{\sinh b\pi} \right\} \right] \cdot \tilde{P}_i$$

2-1. $\xi_1 < \xi$

$$+ \left[\frac{2\ell^4}{EI \cdot \pi^2(4-D_i)} \cdot \left\{ \frac{-1}{\ell(a^2-b^2)} \cdot \frac{\sinh a\pi\xi_1 \cdot \cosh a\pi}{\sinh a\pi} + \frac{-1}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{\sinh b\pi\xi_1 \cdot \cosh b\pi}{\sinh b\pi} \right\} \right] \cdot \tilde{P}_i \quad (36)$$

$$\dot{w}_i(\ell) = \left\{ \frac{a\ell}{\pi} \cdot \frac{1}{(a^2-b^2)} \cdot \frac{\cosh a\pi}{\sinh a\pi} + \frac{b\ell}{\pi} \cdot \frac{1}{(b^2-a^2)} \cdot \frac{\cosh b\pi}{\sinh b\pi} \right\} \cdot \ddot{w}_i(\ell)$$

$$+ \left\{ \frac{-a\pi(2A-a^2)}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{1}{\sinh a\pi} + \frac{-b\pi(b^2-2A)}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{1}{\sinh b\pi} \right\} \cdot \tilde{w}_i(0)$$

2-1. $\xi_1 > \xi$

$$+ \left[\frac{2\ell^4}{EI\pi^2(4-D_i)} \left\{ \frac{1}{\ell(a^2-b^2)} \cdot \frac{\cosh a\pi \cdot \sinh a\pi(1-\xi_1)}{\sinh a\pi} + \frac{1}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{\cosh b\pi \sinh b\pi(1-\xi_1)}{\sinh b\pi} \right\} \right] \cdot \tilde{P}_i$$

2-1. $\xi_1 < \xi$

$$+ \left[\frac{2\ell^4}{EI\pi^2(4-D_i)} \left\{ \frac{-1}{\ell(a^2-b^2)} \cdot \frac{\sinh a\pi\xi_1}{\sinh a\pi} + \frac{-1}{\ell(b^2-a^2)} \cdot \frac{\sinh b\pi\xi_1}{\sinh b\pi} \right\} \right] \cdot \tilde{P}_i \quad (37)$$

1-2, 2-2 の場合

$$\ddot{w}_i(0) = \frac{-\ell^2}{2\pi^2\alpha\beta} \cdot \ddot{P}(1) \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \ddot{P}(0) \cdot \tilde{w}_i(0) + \ddot{Q}(0) \cdot \tilde{w}_i(0)$$

$$2-2, \quad + \frac{\ell^3}{EI\pi^3\alpha\beta(D_i-4)} \{ \alpha \cdot \ddot{\Psi}(0, \xi_1) + \beta \cdot \ddot{\Phi}(0, \xi_1) \} \cdot \frac{\tilde{P}_i}{\alpha^2+\beta^2} \quad (38)$$

$$\dot{w}_i(0) = \frac{-\ell^2}{2\pi^2\alpha\beta} \cdot \dot{P}(1) \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \dot{P}(0) \cdot \tilde{w}_i(0) + \dot{Q}(0) \cdot \tilde{w}_i(0)$$

$$2-2, \quad + \frac{\ell^3}{EI\pi^3\alpha\beta(D_i-4)} \{ \alpha \cdot \dot{\Psi}(0, \xi_1) + \beta \cdot \dot{\Phi}(0, \xi_1) \} \cdot \frac{\tilde{P}_i}{\alpha^2+\beta^2} \quad (39)$$

$$w_i(\ell) = \frac{-\ell^2}{2\pi^2\alpha\beta} \cdot \dot{P}(0) \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \dot{P}(1) \cdot \tilde{w}_i(0) + \dot{Q}(1) \cdot \tilde{w}_i(0)$$

$$2-2 \quad + \frac{\ell^3}{EI \cdot \pi^3\alpha\beta(D_i-4)} \{ \alpha \cdot \dot{\Psi}(1, \xi_1) + \beta \cdot \dot{\Phi}(1, \xi_1) \} \cdot \frac{\tilde{P}_i}{\alpha^2+\beta^2} \quad (40)$$

よって、(21) は (22)～(40) の各式を考慮し、次に示す Fourier-sine 定積分変換の逆変換公式を用いることによりたわみ $w_r(x)$ を求めることができる。

$$\therefore w_r(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{w}_i(x) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (41)$$

4. 数 値 計 算 例

数値計算は、一端固定、他端自由の場合について行なった。この計算の Flow-chart を図-2 に示す。また計算に用いたデータは次の通りである。

$$\begin{array}{ll} E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 & a = 2.0 \text{ cm (管の半径)} \\ G = 8.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 & K = 0.5, 5.0 \text{ kg/cm}^3 \\ \ell = 100 \text{ cm (スパン長)} & P = 1.0 \text{ kg} \end{array}$$

計算結果は図3～5に示す。

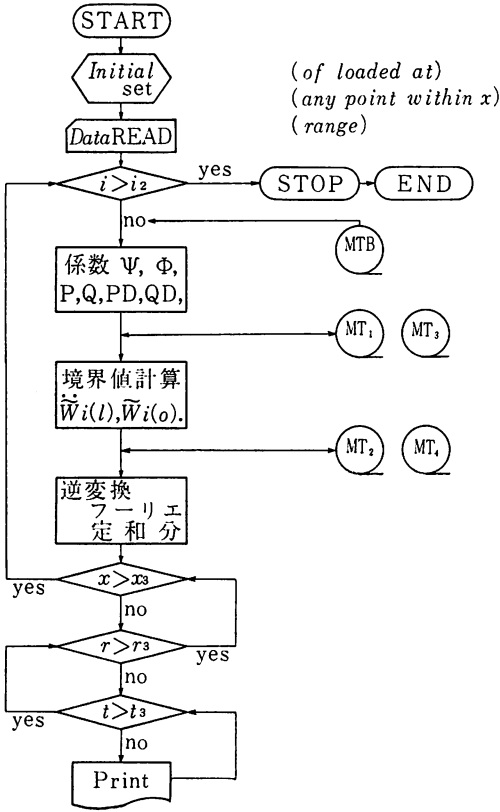


図-2

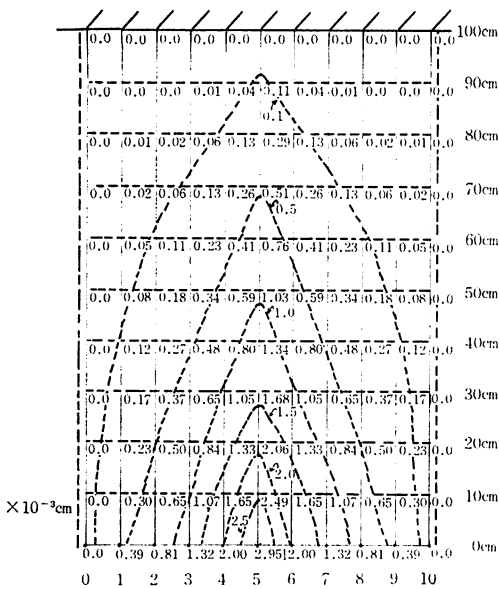


図-3 等たゆみ曲線 $K=1.0 \text{ kg/cm}^3$
 $P=5.0 \text{ kg/cm}^3$

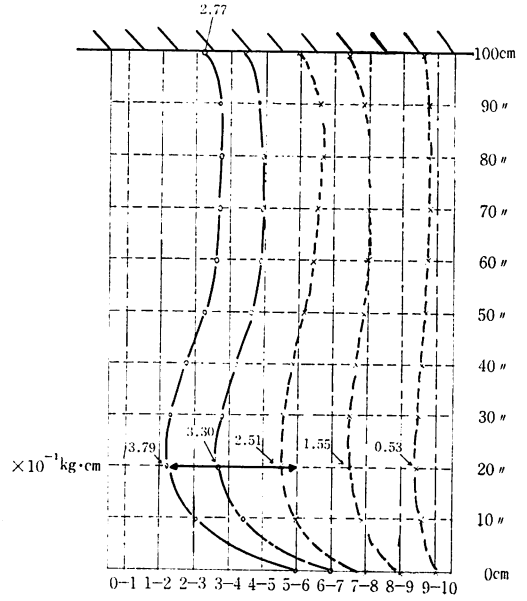


図-4 モーメント図 $K=5.0 \text{ kg/cm}^3$

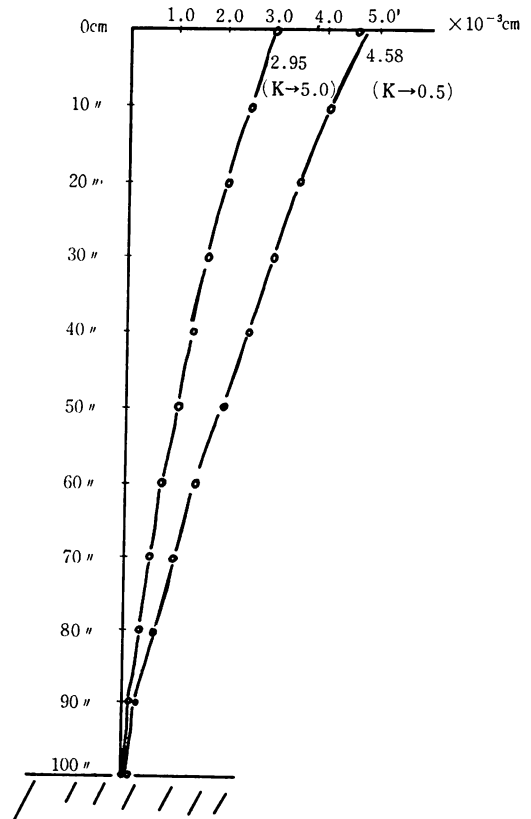


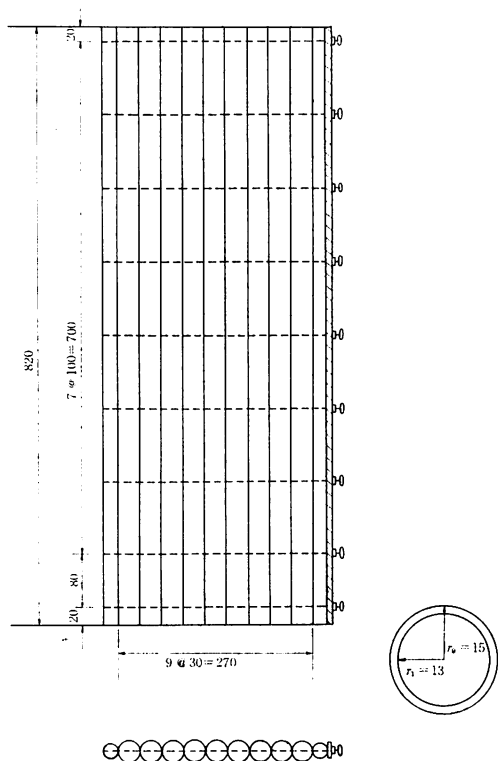
図-5 変位図 $K=0.5 \text{ kg/cm}^3$
 $K=5.0 \text{ kg/cm}^3$

図3, 4は鋼管パイル平面構造の等たわみ曲線およびモーメント図を示したものである。載荷は中央パイルに単位荷重(1 kg)をかけた場合で、たわみ図では載荷点下で最大を示し、モーメント図は弾性床上故、最大値が0.2 l 付近に生ずることが示されている。図5は K -値が 5.0 kg/cm^3 と 0.5 kg/cm^3 の場合の変位図を示したが K -値が大きい方が変位が小さいことを示している。

5. 実 験

§1. 実験模型

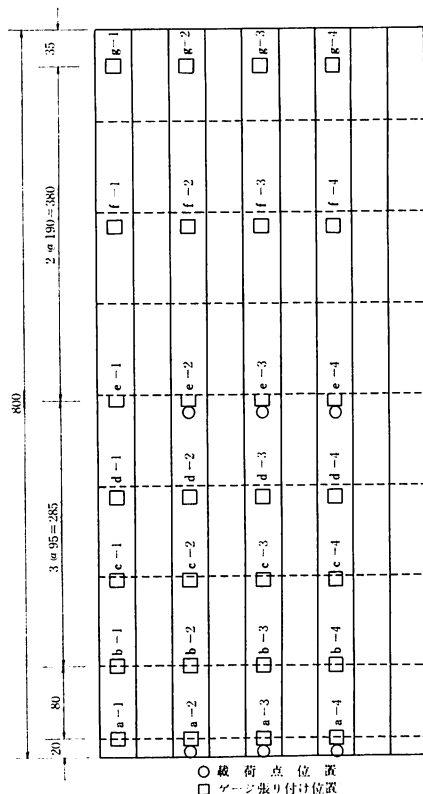
実験供試体の一般図を図一6に示す。供試体材料は三菱アクリライト、内径2.6 cm, 外径3.0 cm, 長さ82.0 cm と、内径1.4 cm, 外径1.8 cm, 長さ82.0 cm, 使用本数各々7本, 2本, を使用した。また、歪測定には共和電業の箔フェステルゲージを用いた。たわみ



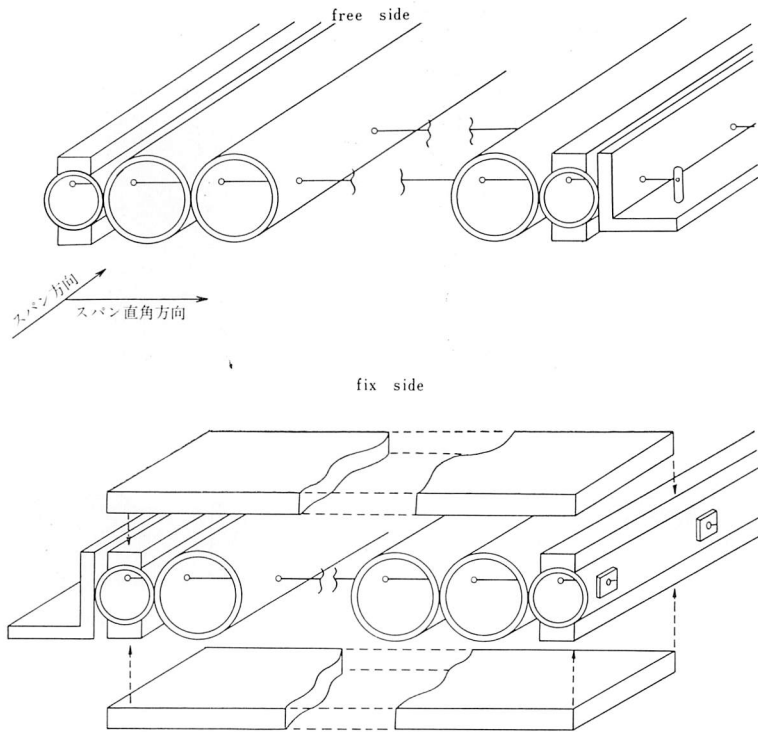
図一6 供試体一般図

はダイヤルゲージで測定した。

弾性床材料としてはマットレスを使用し、アクリル管 $5 \text{ mm} \times 0.8 \text{ l}$ が有効に作用するとして、載荷試験を行ない K -値を $K=1.72 \text{ kg/cm}^3$ と決定した。供試体の製作は、9本の管の両側に各々1本づつ、 $\phi 18 \text{ mm}$ の補助管をつけ、その上下に片側を補助管と同一径で面取りをしたプレートを支パン方向に接着した。支パン方向のヒンヂ結合については理論では、連続的にヒンヂ結合されているという条件であるが、本実験においては支パン方向に等間隔に、管に穴をあけてピアノ線を通し、一方を固定し他方をギターの弦巻きを用いて締めつけ調整した。(図6—7)単純支扱辺は上下ローラー支持とし、固定辺は支パン直角方向に2板の鉄製プレートを用いて、上下から支持台に押えた。(図—8)



図一7 ゲージ張り付け位置及び載荷点位置

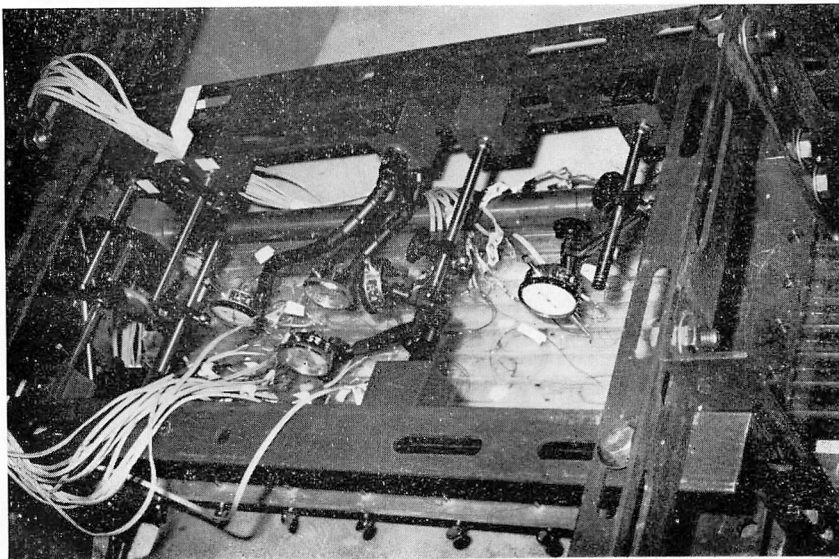


図—8 free side

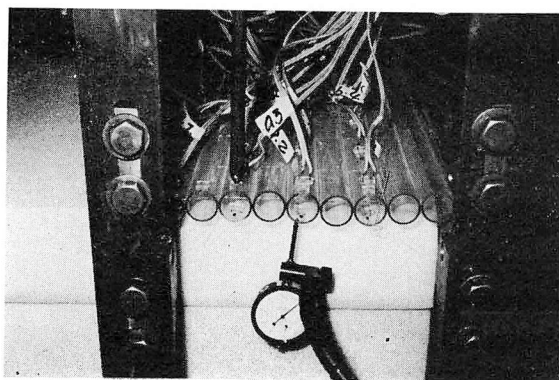
§ 2. 実験値と理論値の比較

実験は、スパン長80 cm、弾性床としては、1.73 kg/cm³なるマットを使用した。荷重は、中央パイルの

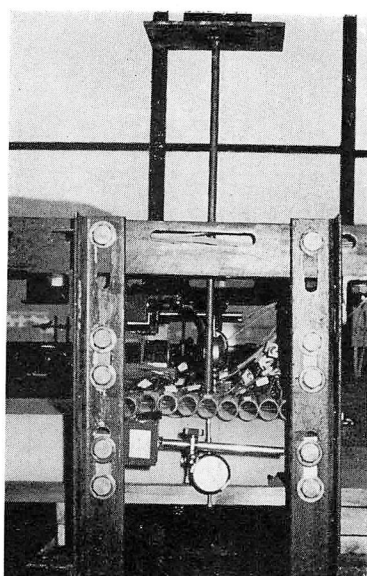
$x=0$ （自由端）および $x = \frac{\ell}{2}$ に作用させた。理論値と比較した結果を図—9 以下に示した。



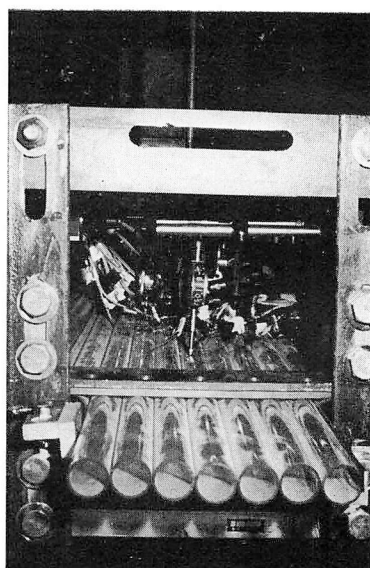
* 実験模型及び
ダイヤルゲージ
位置



* 弾性床上状態



* 弾性床上状態および
中央パイル載荷状態

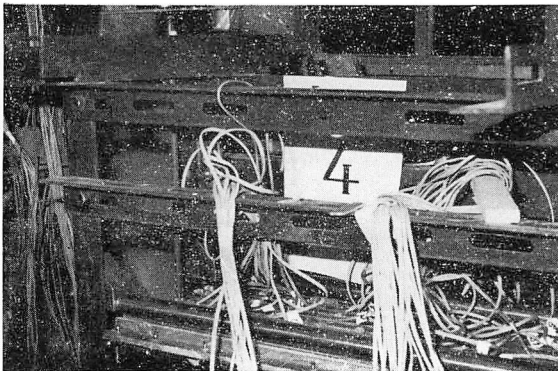


* 支持台および固
定端状態

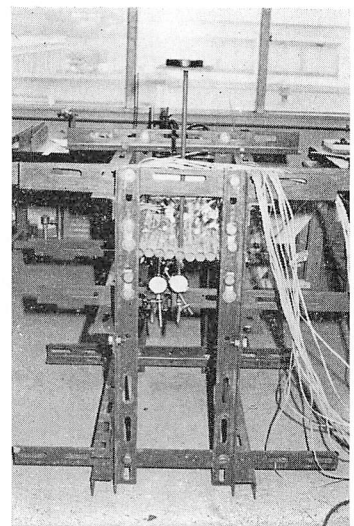


* 中央載荷位置

* Digital Strain
indicator



* 4 kg・载荷状態および単純支持状態



* 支持台および
 $x=0$ 端中央载荷状態

荷重 2 kg

• $K=1.73 \text{ kg/cm}^3$

• $r=5$ 載荷

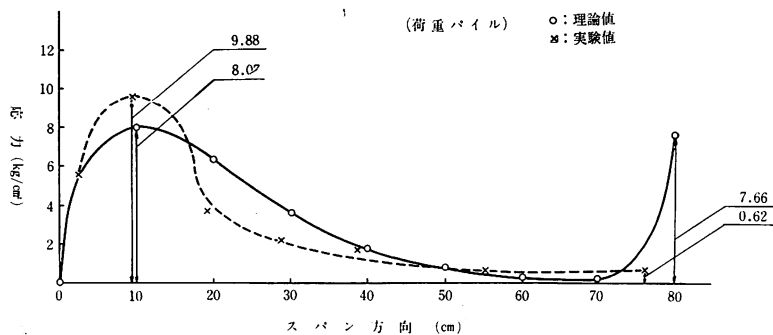


図-9 応 力 図

荷重 2 kg

• $K=1.73 \text{ kg/cm}^3$

• $r=5$ 載荷

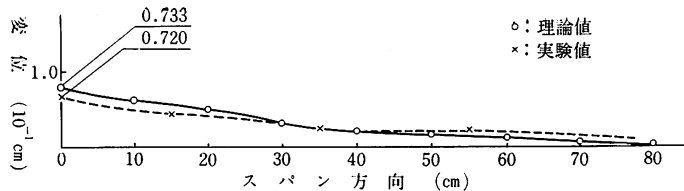


図-10 変 位 図

荷重 4 kg

• $K=1.73 \text{ kg/cm}^3$

• $r=5$ 載荷

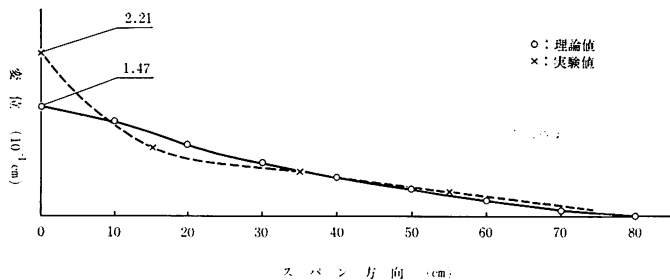


図-11 変 位 図

荷重 4 kg

• $K=1.73 \text{ kg/cm}^3$

• $r=5$ 載荷

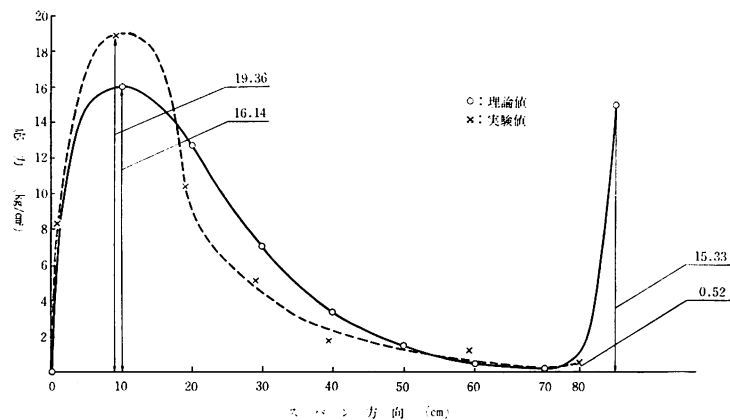


図-12 応 力 図

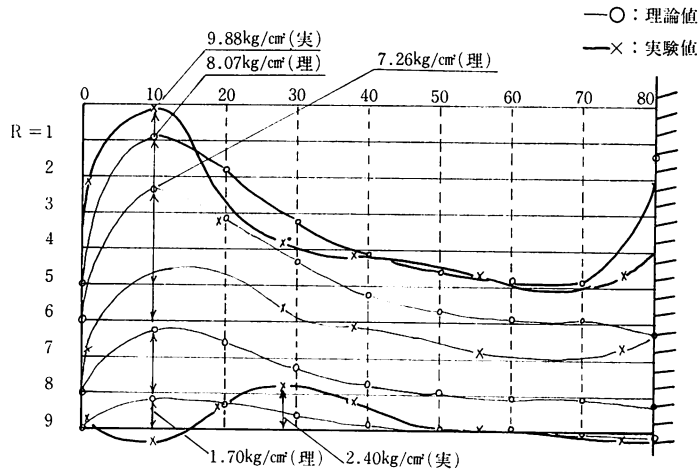


図-13 応 力 図 Frll R=5 2 kg 荷重の載荷

荷重 2 kg
 • $K=1.73$
 • $r=5$
 中央載荷

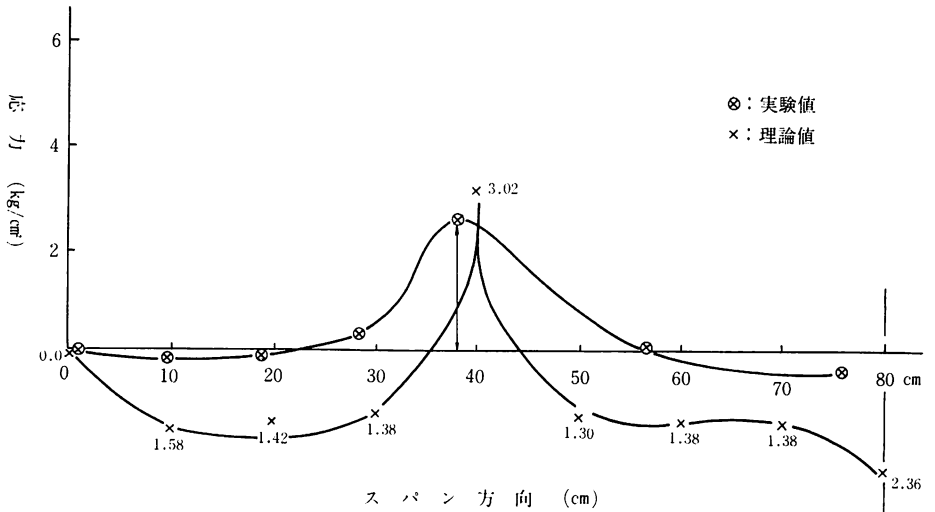


図-14 応 力 図

荷重 2 kg
 • $K=1.73$
 • $r=5$
 中央載荷

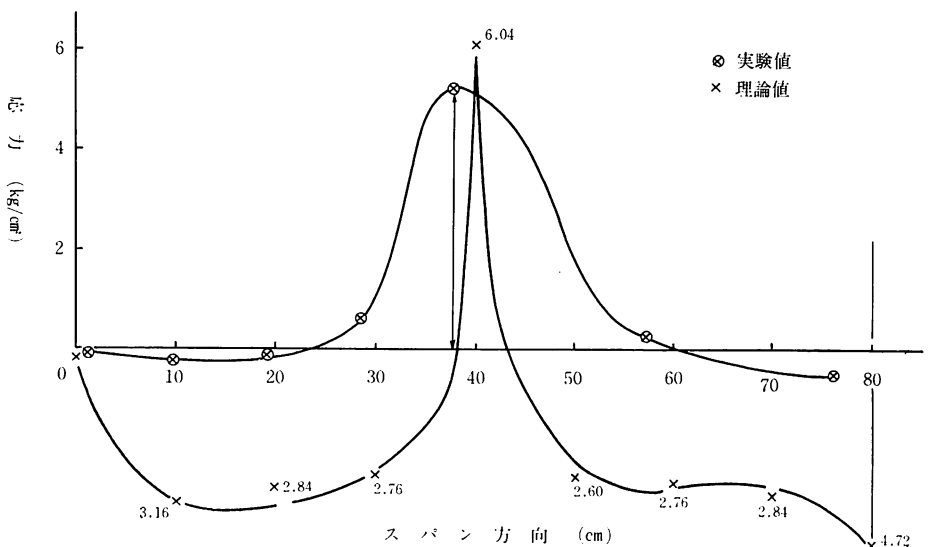


図-15 応 力 図

§ 3. 考 察

アクリル管 ($\ell=80\text{cm}$, $a=1.5\text{ cm}$, $E=40,000\text{ kg/cm}$) における実験値と理論値を比較すれば、次のようである。

変位については、理論値と実験値は、ほとんど一致した値を示した。応力では実験値の最大値は理論値のそれより2～3割(最小19.8%～最大37.2%)大きな値を示し、それ以外の測点では実験値が多少小さ目であった。これは、アクリル管自体の管の変形分が載荷点付近で著しく表われた為と考えられる。その他、実験模型が理論の仮定と次の点で異なることによると思われる。すなわち接点が厳密には、ヒンズ結合ではない、単純支持条件が充分でない、また固定端の条件、弾性床上という点で理論仮定を充分満足していない。

全般的に見て模型の精度、支持条件及びダイヤルゲージ、ストレインゲージの測定、精度、分解能よりみて実験値と理論値はかなり一致しているに考えられ、理論は、この種の構造物の応力解析に充分なものであると結論できる。

参 考 文 献

- S. G. Nōmachi: A note on Finite Foudier Transforms Concerning Finite Integration.
(The Transript from the Memories of the Muroran)
(Institute of Technology Vol.5 No.2)
 - 能町純雄・松岡健一・沢田知之:
スパン方向のヒンズで結合された棒状要素による面構造の応力について
(土木学会, 第25回年次学術講演集)
 - 能町純雄・松岡健一・沢田知之:
スパン方向にヒンズ結合されたパイルによる平面構造について
(土木学会, 北海道支部 研究発表 論文集第 27 号)
(昭和45年度)
 - 能町純雄・松岡健一・沢田知之
円形に配置された鋼管パイルの基礎の応力計算について
(土木学会, 第26回年次学術講演集)
 - 能町純雄・松岡健一・沢田知之
鋼管パイル基礎の応力解析について
(土木学会, 北海道支部研究発表論文集)(第 28 号, 昭和46年度)
- (昭和47年 9 月30日受理)