等角共役点を基礎とした六点円について

早　坂　平四郎*

"Six-Points Circle" based on Isogonal Conjugate Point.

Heishiro HAYASAKA

要　旨

"Nine-Points Circle" は初等幾何学においてはよく知られた定理であり，これについては数多くの論文が発表されているので，更にこれについては論ずる必要はないと思う。ここでは等角共役点の性質や，その点に関する定理を基礎として，Six-Points Circle と名付けてこれらに類似した性質をもつ cosine Circle, Lemoine Circle, Tucker's circle 等について研究する。

Synopsis

"Nine-points Circle" is a well-known theorem in primary geometry, and so many papers and theses on it have hither to been published that there seems to be no need to discuss about it anew. So I am studing here about Cosine Circle, Lemoine Circle, Tucker's Circle, etc., in terms of "Six-points Circle," a term newly created by me on the bases of various properties of Isogonal Conjugate Point and the theorems centering on the Points.

次にあげる諸定理は初等幾何学や三角法による解法は発表されているが，複素数を用いての証明は示されてはいない。従ってこの論文中にある文字は凡て複素数とする。

定義；三角形の各頂点を通る直線が1点で交わるとき，3つの角の2等分線に関して頂点を通る3直線と対称である直線もまた同1点で交わる(1)。このような性質をもつ3組の直線は3つの角に関し互いに**等角共役**でありといい，この2点を3角形の**等角共役点**という。

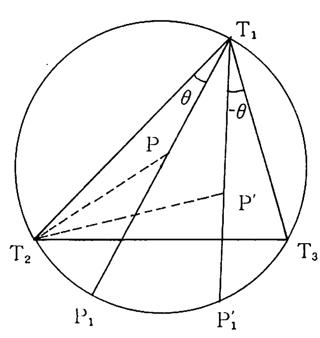
(1)の証明略

以上あげた定義による等角共役点が同一点で交わることを定理として証明しておく。

定　理

$\Delta T_1T_2T_3$ の3つの角 $\angle T_i$ $(i=1,2,3)$ の2等分線のT_iP_i $(i=1,2,3)$ に関する対称である直線を T_iP_i' $(i=1,2,3)$ とすれば，これらの3直線は同一点で交わる。以後 $TiPi$ 等の $i=1,2,3$ を省く

（証明）$\Delta T_1T_2T_3$ の外接円を単位円にとり，T_i の座標を t_i で表わす。3直線 T_iP_i の交点を P, T_iP 或いはその延長が外接円との交点 P_i とし $t_ie^{i\theta}$ で表わすと，$\angle T_i$ の2等分線と対称なる直線が外接円との交点 P_i' は $t_ie^{-i\theta}$ で表わされる。ここに $e^{i\theta}$ の $i=\sqrt{-1}$ とす。



第 1 図

従って T_1P_1 および T_1P_1' なる2直線は夫々次式で表わされる。

$$z+t_1t_2e^{i\theta}\bar{z}=t_1+t_2e^{i\theta} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$z+t_1t_3e^{-i\theta}\bar{z}=t_1+t_3e^{-i\theta} \quad \cdots\cdots(2)$$

点 P の座標を α とすれば，上式を満たすので

$$\alpha+t_1t_2e^{i\theta}\bar{\alpha}=t_1+t_2e^{i\theta} \quad \cdots\cdots(3)$$

(2), (3)から

* 教授　一般教科数学

$$(\alpha-t_1)z+s_3(1-t_1\bar{\alpha})\bar{z}=t_1(\alpha-t_1)+t_2t_3-s_3\bar{\alpha}\cdots(4)$$

上式は T_1P_1' の方程式である。

又 $\angle T_2$ の2等分線に関して T_2P と対称である T_2P' の方程式は

$$(\alpha-t_2)z+s_3(1-t_2\bar{\alpha})\bar{z}=t_2(\alpha-t_2)+t_3t_1+-s_3\bar{\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

この(4), (5)から $P'(\beta)$ が求められる。

$$\therefore\quad \beta=\frac{s_3\bar{\alpha}^2-s_2\bar{\alpha}+s_1-\alpha}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$

この式は t_i の対称式であるから T_2, T_3 についても同様の結果が求められるので同一点 P' で交わる。

ここに $\angle T_2T_1P=\theta$, $s_1=\sum^3 t_i$, $s_2=\sum^3_{i\,j} t_it_j$, $s_3=\prod^3 t_i$ とす。

次に等角共役点 α, β 間の条件は次式で表わされる。

$$\alpha+\beta+s_3\bar{\alpha}\bar{\beta}=s_1$$

（証明）

$$\beta=\frac{s_3\bar{\alpha}^2-s_2\bar{\alpha}+s_1-\alpha}{1-\alpha\bar{\alpha}}\qquad\text{であるから}$$

$$\alpha+\beta=\frac{s_3\bar{\alpha}^2-s_2\bar{\alpha}+s_1-\alpha^2\bar{\alpha}}{1-\alpha\bar{\alpha}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\bar{\beta}=\frac{\bar{s}_3\alpha^2-\bar{s}_2\alpha+\bar{s}_1-\bar{\alpha}}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$

$$s_3\bar{\beta}=\frac{\alpha-s_1\alpha+s_2-s_3\bar{\alpha}}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$

上式の両辺にへ $\bar{\alpha}$ をかけて

$$s_3\bar{\alpha}\bar{\beta}=\frac{\alpha\bar{\alpha}-s_1\alpha\bar{\alpha}+s_2\bar{\alpha}-s_3\bar{\alpha}^2}{1-\alpha\bar{\alpha}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

上の2式から

$$\alpha+\beta+s_3\bar{\alpha}\bar{\beta}=\frac{s_1(1-\alpha\bar{\alpha})}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$

となって

$$\alpha+\beta+s_3\bar{\alpha}\bar{\beta}=s_1\qquad\text{となる。}$$

又

$$\alpha+\beta+s_2\bar{\alpha}\bar{\beta}=s_1\qquad\text{から}$$

$$s_3\bar{\alpha}+s_3\beta+\alpha\beta=s_2$$

$$\therefore\quad (1-\alpha\bar{\alpha})\beta+\alpha-s_3\bar{\alpha}^2=s_1-s_2\alpha$$

$$\therefore\quad \beta=\frac{s_3\bar{\alpha}^2-s_2\bar{\alpha}+s_1-\alpha}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$

上の結果から $\Delta T_1T_2T_3$ の α, β が等角共役点であるための条件式は

$$\alpha+\beta+s_3\bar{\alpha}\bar{\beta}=s_1$$

定理.

$\Delta T_1T_2T_3$ の外接円を単位円にとり, α, β をこの三角形の等角共役点とする。点 α による垂足三角形の外接円の方程式を求める。

（証明）点 α の辺 t_2t_3, t_3t_1, t_1t_2 に関する対称点を, それぞれ a_i とすると

$$a_1=t_2+t_3-t_2t_3\bar{\alpha}$$

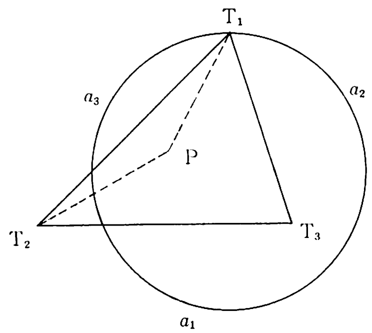
となるので, これから

$$1-a_1\bar{\alpha}=(1-\bar{\alpha}t_2)(1-\bar{\alpha}t_3)$$

となり, $\Delta T_1T_2T_3$ の α の対称点 a_i を通る円の方程式は次式で表わされる。

$$1-\bar{\alpha}z=\frac{\prod^3(1-\bar{\alpha}t_i)}{1-\alpha t}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで $t=t_i$ のとき z はそれぞれ a_i となるので, $|t|=1$ の円周上を t が移動するとき, 点 z は $\Delta a_1a_2a_3$ の外接円周上を移動する。



第 2 図

$z=\infty$ のとき, $t=\dfrac{1}{\alpha}$ であるから, 上の円の中心を a_0 とすれば, a_0 は $t=\alpha$ のときの z 値である。

$$\therefore\quad 1-\bar{\alpha}a_0=\frac{\prod^3(1-\bar{\alpha}t_i)}{1-\alpha\bar{\alpha}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1), (2) の式から

$$(z-a_0)\bar{\alpha}=\prod^3(1-\bar{\alpha}t_i)\left\{\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}-\frac{1}{1-\bar{\alpha}t}\right\}$$

$$\therefore\quad z-a_0=\frac{\prod^3(1-\bar{\alpha}t_i)(\alpha-t)}{(1-\alpha\bar{\alpha})(1-\bar{\alpha}t)}$$

ここで $\left|\dfrac{\alpha-t}{1-\bar{\alpha}t}\right|=1$ であるから

$$z-a_0=(1-\alpha\bar{\alpha})\lambda$$

で表わされる。ここで $\lambda=\dfrac{\alpha-t}{1-\bar{\alpha}t}$ とする。

(2) 式から

$$a_0=\frac{1}{\alpha}-\frac{\prod^3(1-\bar{\alpha}t_i)}{(1-\alpha\bar{\alpha})\bar{\alpha}}$$

$$=\frac{s_3\bar{\alpha}^2-s_2\bar{\alpha}+s_1-\alpha}{1-\alpha\bar{\alpha}}$$

従って $a_0=\beta$ となる。

円(1)の中心は，$\varDelta T_1T_2T_3$ に関する α の等角共役点 β でなければならない。よって $\varDelta T_1T_2T_3$ の点 α の垂足三角形の外接円の方程式は

$$z=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{1-\bar{\alpha}\beta}{2}t\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

で表わされる。

以上の定理を基礎にすると，次の定理が得られる。

定理 1　三角形 $T_1T_2T_3$ の等角共役点 α, β から3辺に下した垂線の足6点は，同一円周上にある。

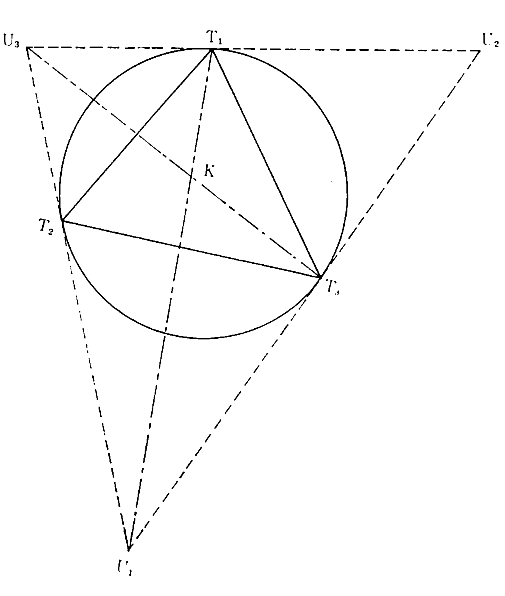
＊ このような円を6点円（Six-points circle）と名付けた。

（証明） 垂足三角形の外接円は(3)で表わされるから,$\varDelta T_1T_2T_3$ の α の代りに β としても同一結果となるので，この6点は，中心 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ であり，半径 $\frac{1-\bar{\alpha}\beta}{2}t$ の円周上にある。

定義　三角形の1頂点における外接円の接線に平行である直線を対辺に対して，逆平行（Anti parallel）であるという。

定義　三角形の重心の等角共役点をこの三角形の類似重心（Symmedian point 或いは Lemoine point）という。

定理　三角形の外接円の各頂点における接線の作る三角形の各頂点と接点を結付ける直線は同一点で交わり，この交点はもとの三角形の類似重心である。



第 3 図

（証明） $\varDelta T_1T_2T_3$ の外接円を単位円，その頂点の座標を t_i で表わすと，接線 T_2U_1，T_3U_1 の方程式は夫々に

$$z+t_2\bar{\alpha}=2t_2$$
$$z+t_3\bar{\alpha}=2t_3$$

で表わされるから，この2つの方程式から

$$z=\frac{2t_2t_3}{t_2+t_3}$$

従って直線 T_1U_1 の方程式を求めると

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ t_1 & \dfrac{1}{t_1} & 1 \\ \dfrac{2t_2t_3}{t_2+t_3} & \dfrac{2}{t_2+t_3} & 1 \end{vmatrix}=0$$

これから

$$2t_1^3-(3z+s_2\bar{z})t_1^2+(s_1z+3s_3\bar{z})t_1-2s_3=0$$

この方程式で，t_1，t_2，t_3 についても成立するので，z を求めると

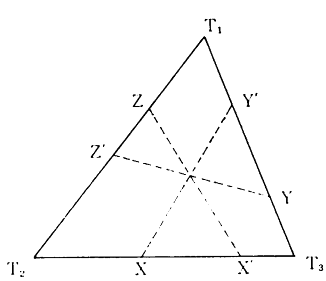
$$z=\frac{2s_2^2-6s_1s_2}{s_1s_2-9s_3}$$

よって直線は，同一点 K で交わり，直線 T_2T_3 に U_2U_3 は逆平行となることが明かであるので，点 K は $\varDelta T_1T_2T_3$ の類似重心である。

定理 2　三角形 $T_1T_2T_3$ の類似重心 K を通り，逆平行である直線と3辺との交点は同一円周上にある。

(1)　この6点円を Cosine circle という。

(2)　類似重心を中心とす円となる。



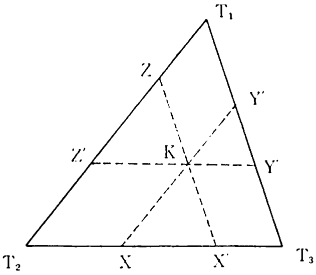
第 4 図

定理 3　三角形 $T_1T_2T_3$ の類似重心 K を通り3辺に平行である直線と3辺との6交点は同一円周上にある。

(1)　この6点円を（Lemoine circle 或いは Triplicate ratio circle）という。

(2)　三角形の外接円の中心と類似重心との中点を

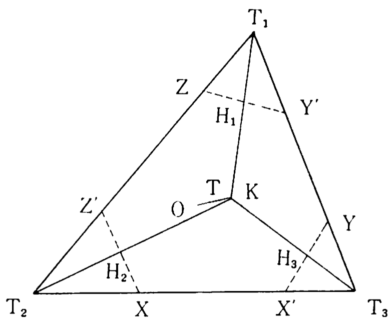
中心とする円となる。



第5 図

定理4　$\varDelta T_1T_2T_3$ において T_1K, T_2K, T_3K, OK をそれぞれ H_1, H_2, H_3, T において,

$$\frac{T_1H_1}{H_1K}=\frac{T_2H_2}{H_2K}=\frac{T_3H_3}{H_3K}=\frac{OT}{TK}=\frac{\lambda}{a}$$



第 6 図

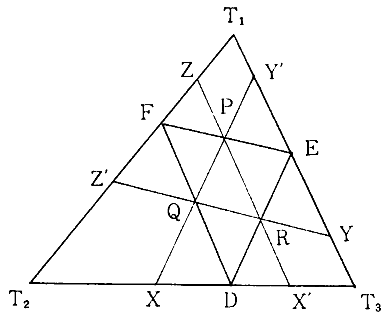
ここで λ は実数とする。
である等比に分け，H_i を通り夫々 3 辺に逆平行である直線が他の 2 辺との 6 交点は同一円周上にある。

(1)　この 6 点円を Tucker's circle という。

(2)　6 点円は T を中心と円となる。

定理5　$\varDelta T_1T_2T_3$ の垂足三角形 DEF の 3 辺の中点を 2 つづつ結び付けた直線と 3 辺との 6 交点は同一円周上にある。

この 6 点円を Taylor'r circle という。



第 7 図

参 考 文 献

(1)　解析幾何学　Ⅰ，Ⅱ．窪田忠彦

(2)　初等幾何学作図問題　窪田忠彦

(3)　平面・球面三角法　掛谷宗一，蓮池良太郎

(4)　複素数の幾何学　小林幹雄

(5)　数学辞典　岩波書店

(6)　A treatise on plane trigonometry: E. W. Hobson.

(7)　Traité de géométrie, I, II. E. Rouché-Ch. de Comberousse.

（昭和48年 1 月16日受理）