通信伝達システムにおける最短経路問題

久　末　博　美

A Minimal length problem of communication system.

Hiromi Hisasue

要　旨

本文は，通信伝達システムにおいて，コストとして *SN* 比（信号電力対雑音電力比），さらに雑音指数を考えて，特定の2点間を結ぶ最小の道を選ぶ，いわゆる最短経路問題を，通信中継網の問題に適用することを考えている。

Synopsis

In this paper, auther discussed that one applyed it trunking to minimai length propiem, which is selecting shortest path between two specified vertex in a graph, by *SN* ratio and noise figure to cost in communication system.

1　序　　論

通信システムの最も基本的な構成は，情報の発信者と受信者からなる図1のようなシステムである。

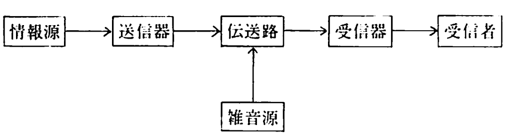

図　1

通信方式を考えることは，情報源と受信者が与えられた場合に，その間の情報伝送をいかに行えば，正しく安価で迅速であるかを論ずることである。一般に通信システムを評価するものとして，伝達情報の質，量，コストなどがあげられ，これらを基準にシステムが設計される。

通信回路網を扱う場合，伝送路をグラフの枝 (edge) に，端末を節点 (vertex) に対応させて，グラフ理論並びにネットワーク理論を用いるのが有効である。グラフの枝に，その性質を表わす数をつけたものがネットワークであるが，問題をネットワークとして扱う場合，2つの立場がある。1つは性質を表わす数として容量を考え，流れの問題を扱うフローネットワークであり，もう1つは各枝にコスト，時間，距離などを割り当て，最小コストなどの問題を扱うコストネットワークである。

ここでは，通信システムの質的な評価基準としての *SN* 比，さらに雑音指数に着目し，ある地点から他の地点へ信号を送る時，受信地点で雑音が，最小となるような経路を選択することを考えている。すなわちネットワークにおける最短経路問題として取扱うことを述べる。

2　本　　論

雑音を含む通信伝達システムにおいて，通信伝送路をグラフの枝とし，その分岐点を節点とする。このようなシステムにおいて，各枝のコストとして *SN* 比を考え，ある2点間の経路でコストが最大となるものを選ぶことを考える。

最初，最も簡単なモデルとして，図2のような，増幅も減衰もない経路の *SN* 比を最大にする問題を考える。

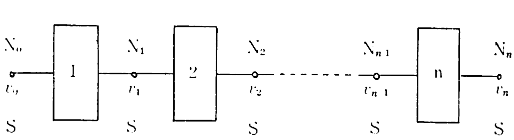

図　2

信号電力を S とし，通信路の各区間内に生じた雑音電力を，その区間の出力側で側った値を N_i ($i=1.2,\cdots,n.$) とする。N_0 は最初の入力に生じた雑音となる。点 v_0 から v_n までの *SN* 比の逆数は次式となる。

* 講師　電気工学科

$$\frac{N}{S}=\frac{N_0+N_1+N_2+\cdots\cdots+N_n}{S}$$

$$=\frac{N_0}{S}+\frac{N_1}{S}+\frac{N_2}{S}+\cdots\cdots+\frac{N_n}{S} \quad (1)$$

従って各枝の重みとして N_i/S をとり，N/S が最小となる道を選択すれば，S/N を最大にすることができる。

実際の信号伝送システムでは，増幅と減衰が交互に繰返される。信号入力を S_0 とし，1つの区間内の利得を $G_i(i=1.2,\cdots n)$ とすると，図3のような点 v_0 から v_n までの1つの経路の N/S は次式で表現される。

$$\frac{N}{S}=\frac{((N_0G_1+N_1)G_2+N_2)G_3+\cdots\cdots}{S_0\cdot G_1\cdot G_2\cdot G_3\cdots G_n}$$

$$=\frac{N_0}{S_0}+\frac{N_1}{S_0G_1}+\frac{N_2}{S_0G_1G_2}+\cdots\cdots+\frac{N_n}{S_0G_1G_2\cdots G_n} \quad (2)$$

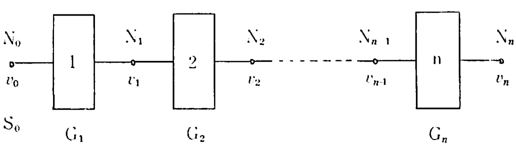

図　3

(2)式では，各項に連続した経路の枝の利得が積の形で入り，各枝のみによる値を指定できない。しかし，ここで

$$G_1=G_2=G_3=\cdots=G_n=1 \quad (3)$$

とすることができれば，(2)式は(1)式と同じ形になり，最短経路問題として取扱うことができるであろう。

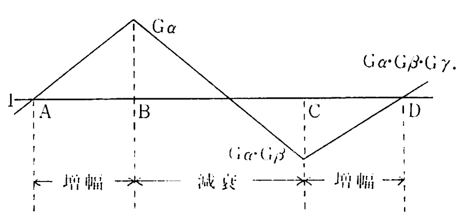

図　4

ここで各区間の利得を1にすることを考えてみる。増幅を $G>1$，減衰を $G<1$ とすることができる。図4に示すように，増幅，減衰の繰返しに適当なレベルを定め，増幅の過程中に，このレベルを横切を2つの点をグラフの節点とし，その区間を枝としてみる。このようにすれば，1区間内の利得は

$$G=G_\alpha G_\beta G_\gamma=1 \quad (4)$$

とすることができ，しかも $N_1, N_2, \cdots N_n$ は各区間について，D 点の雑音出力であるから，実測可能である。

今，N_0 を熱雑音のみとすれば，(2)式を雑音指数で表わすことができる。

$$F_i=\frac{N_0G_i+N_i}{N_0G_i}=\frac{N_i}{N_0G_i}+1$$

又は

$$\frac{N_i}{N_0G_i}=F_i-1 \quad (5)$$

とおくと次の雑音指数の関係式となる。

$$F=\frac{S/N_0}{S/N}=1+\frac{N_1}{N_0G_1}+\frac{N_2}{N_0G_1G_2}+\cdots+\frac{N_n}{N_0G_1\cdots G_n}$$

$$=F_1+\frac{F_2-1}{G_1}+\frac{F_3-1}{G_1\cdot G_2}+\cdots+\frac{F_n-1}{G_1\cdot G_2\cdots G_{n-1}} \quad (6)$$

但し，$N_0=KTB$，(T: 絶対温度，K: ボルツマン定数，B: 等価帯域幅）である。

グラフの枝に対応する1区間を以上の意味にとれば，$G_1=G_2=\cdots=G_n=1$ とすることができ，雑音指数を用いて最短経路問題に帰着することができる。

以上の議論を，無線中継を例にして考察してみる。中継網の1つの区間は図5のようになる。

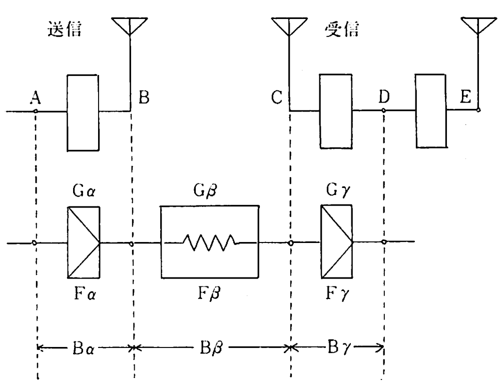

図　5

AB 間，CE 間が増幅区間，BC 間が減衰区間である。1区間の全雑音指数を F とすると，F は等価帯域幅を考慮して次式となる。

$$F=F_\alpha+\frac{F_\beta-1}{G_\alpha}\cdot\frac{B_{\beta\gamma}}{B_{\alpha\gamma}}+\frac{F_\gamma-1}{G_\alpha G_\beta}\cdot\frac{B_\gamma}{B_{\alpha\gamma}} \quad (7)$$

但し　$B_{\alpha\gamma}=B_\alpha\cdot B_\beta\cdot B_\gamma$　　$B_{\beta\gamma}=B_\beta\cdot B_\gamma$

ここで，例えば $B_{\alpha\gamma}$ について考えてみると，

$$B_{\alpha\gamma}=\frac{1}{G_\alpha G_\beta G_\gamma}\int_0^\infty G_\alpha(f)\cdot G_\beta(f)\cdot G_\gamma(f)df \quad (8)$$

であるが，$G_\beta(f)=$ 一定であり，又 $G_\alpha(f)$，$G_\gamma(f)$ ともに同一帯域幅で，できるだけ平坦にとるので，

$$B_{\alpha\gamma}=B_{\beta\gamma}=B_\gamma \quad (9)$$

として，F は次の様に書くことができる。

$$F=F_\alpha+\frac{F_\beta-1}{G_\alpha}+\frac{F_\gamma-1}{G_\alpha\cdot G_\beta} \tag{10}$$

CE 間は多段増幅系と考えられるので，この部分の雑音指数は，第1段目の利得と雑音指数が大きく影響し，2段目以下の影響は小さくなり，一定値へ収束して行く。その値を F_γ として D 点を定めれば，これに応じて CD 間の利得 G_γ が得られ，G_β は容易に求められるから，総合利得

$$G=G_\alpha\cdot G_\beta\cdot G_\gamma=1 \tag{11}$$

となるような G_α を求め，A 点を定めることができる。従って F_α を決められる。次に BC 間は，地上通信で，外来雑音が無視できると仮定すると，雑音として残るのは，伝播路の途中に生ずる熱雑音のみであるから，この部分の雑音指数は，線形受動回路のそれと同じ様に考えられる。N を出力側における熱雑音を含めた全雑音電力とすると，雑音指数の定義式，

$$F=\frac{N}{GKTB} \tag{12}$$

において，今の場合，$N=KTB$ である。従って，BC 間では次式となる。

$$F_\beta=\frac{1}{G_\beta} \qquad \therefore\ F_\beta\cdot G_\beta=1 \tag{13}$$

普通は $G_\beta\ll 1$ であるから

$$F_\beta\gg 1 \tag{14}$$

であることがわかる。又 AB 間，CD 間では

$$\begin{aligned}F_\alpha&>1\\ F_\gamma&>1\end{aligned} \tag{15}$$

である。(11)式と(13)式を用いて(10)式を変形すると，次の様になる。

$$\begin{aligned}F&=F_\alpha+\frac{G_\beta F_\beta-G_\beta+F_\gamma-1}{G_\alpha\cdot G_\beta}\\ &=F_\alpha+\frac{F_\gamma-G_\beta}{G_\alpha\cdot G_\beta}\\ &=F_\alpha+(F_\gamma-G_\beta)G_\gamma\end{aligned} \tag{16}$$

又，$G_\beta\ll 1$，$F_\gamma>1$ より $F_\gamma\gg G_\beta$

$$\therefore\ F\fallingdotseq F_\alpha+F_\gamma G_\gamma \tag{17}$$

従って，(16)，(17)式よりトータルの雑音指数が求められる。

又，さらに $F_\alpha\ll F_\gamma G_\gamma$ なるようにすれば

$$F\fallingdotseq F_\gamma G_\gamma \tag{18}$$

すなわち $F_\alpha\fallingdotseq F_\gamma$ と考えられるから，

$$\begin{aligned}&1\ll G_\gamma\\ &\therefore\ G_\gamma\gg G_\alpha\end{aligned} \tag{19}$$

このように，$G_\alpha\cdot G_\beta\cdot G_\gamma=1$ となる点 A，D を求め，$G_\alpha\ll G_\gamma$ ならしめて F_γ, G_γ を求めれば，(18)式より F を求めることもできる。

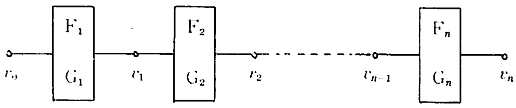

図 6

以上の様にして求められた点 A, D をグラフの節点とし，この間を枝とし，1区間の雑音指数を F_i，利得を G_i とすれば，図6に示すような中継網の2点間の1つの道の総合雑音指数は次式で表現することができる。

$$F_T=F_1+\frac{F_2-1}{G_1}+\frac{F_3-1}{G_1\cdot G_2}+\cdots\cdots+\frac{F_n-1}{G_1\cdot G_2\cdots G_{n-1}} \tag{20}$$

ここで

$$G_1=G_2=\cdots G_n=1 \tag{21}$$

従って

$$F_T=F_1+(F_2-1)+(F_3-1)+\cdots+(F_n-1) \tag{22}$$

$F_i-1=f_i$ とおくと，

$$F_T-1=f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n \tag{23}$$

すなわち，f_i を各区間のコストとすれば，次のコストネットワークによって，最短経路問題に帰着される。

〔直列法則〕

直列に接続される経路のコストは，各区間のコストの和である。すなわち図7において

$$f_S=f_1+f_2+\cdots+f_n$$

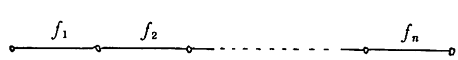

図 7

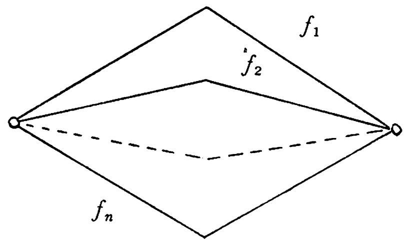

図8

〔並列法則〕

並列に接続される経路のコストは，各区間のうちで，最小のコストに等しいす。なわち図8において，

$$f_P = \mathrm{Min}\,[f,\cdot f,\cdots f_n]$$

以上の議論の方式によって，無線中継網のある2点間における最短経路を見出せば，総合の F_T-1 が最小の道を選んだことになり，最小雑音指数の経路を選択することができる。

3 結　び

本文は以上のように，適用可能性に主眼を置いて議論したわけである。なお最短経路を見出す方法としては，Dantzig の方法，最短 Tree による方法など種々の方法が知られている。又，1つの区間の雑音指数を最小にすることを考えた場合，F_α，F_r，及び G_β，G_r の配分をどの様にすればよいかという問題が生じるが，多くの場合，送信機，受信機は標準規格のものが用いられるであろうし，無線中継所の位置は，地理的条件などで決められるので，それらが与えられた上での通信経路の選択を考えたものである。

最後に本研究にあたり，多大な御協力と，懇切な御指導いただいた，北海道大学工学部，安田教授ならびに電気回路学研究室一同に深く感謝します。

参考文献

(1) 久末，安田「グラフ理論の無線中継方式への適用」第22回テレビジョン方式回路研究委員会 (1670)

(2) 「通信システム学ハンドブック」ラテイス刊 (1968)

（昭和48年1月10日受理）