ガウスの平均値法による求積について

新　谷　金　蔵*

On Mensuration by Gaussian Mean Value Method.

Kinzo SHINYA

要　旨

ガウスの平均値法を用いて，曲線図形の正確な面積計算を行う方法を求め，土木工学測量の分野での応用について述べる。

Synopsis

In this paper, method of exact area-calculation for curved figures is analyzed practically with application of Gaussian Mean Value Method, and adaptable techniques to this method in surveying field are described.

土木工学測量の分野で求積を要する場合しばしば起るのであるが，今その方法をいくつか挙げてみると次のようなものがあります。

1. 求積法について

(1) 曲線を方眼紙の上に書いて曲線が囲む部分の目の個数を数える方法

この場合，曲線で切られた目の数を全て一個として算入すれば過大となり，全てを除外すれば過小になる。正しい値はこれら二つの間にあって境界線の通る目は普通½として算入，方眼の目を細かにすることにより，又過不足合わせなどして相当正確な結果が得られる。

(2) 閉曲線を多角形で置換える方法

この場合，曲線と直線との間の部分を曲線の内にある部分と外にある部分との面積を等しくなるようにし三斜法などによってこの多角形の面積を算出する。

(3) 閉曲線が囲む面積を平行線で細分梯形公式，シンプソン公式などを用いる方法

従来もっともしばしば用いられる方法であるが，この場合，平行線の数を増して細分する程正しい値が得られる。

(4) 面積を測る器械（測面器）を用いる場合

この場合は面積が小さい程測定の精度は劣るのので図面の縮尺を考慮して測定に必要な精度を得るようにしなければならない。特に最近の面積測定機として光電管を用いるもの，原図の所要点をトレスする事による移動量を電算機と結合して求積する便利なものもある。

(5) 曲線の式を求め積分によって求める方法

曲線の次数による最低数以上の点より最小自乗法によって曲線の式を定め求積するもので，曲線の式を求めることは単に面積計算にかぎらず各種の実験からその最適実験式を求める場合にも良く用いられる方法である。

(6) 平均値法による方法

平均値法については色々な数学書，数値計算書などに既に詳しく述べられている所で変数 x の関数 $y=f(x)$ の区間 (a, b) における積分 $I=\int_a^b y dx$ の値を求めるのにこの区間内の有限個の x に対する y の値を用いて I の値を近似的に求める方法であります。別名「代表座標法ともいわれるものであります。この場合，x のとり方などによって種々の方式がありまして区間を等分して各分点の x をとるものがニュートン・コーツ(Newton-Cotes)方式で，等分した小区間の中点の x を使用するすのがマクローリン (Maclaurin) 方式であります。区間を等間隔としないで分点の全ての関数値 (y) の重さを均等としたものがチェビシェク (Tschebyscheff) 方式であり，区間重さに何等の条件もつけないものがガウス (Gauss) の方式であります。無条件であるだけ他の方式のものよりも近似度が高く

* 助教授　土木工学科

精度の高いものとされているのであります。分点が等間隔であることは数表を利用する場合に大いに便利であり，従来から多用され，分点が半端な数となるガウス，チェビシェフ方式は関数値の計算に困難が多いため稍敬遠され勝であったと思います。然し最近は計算機の進歩，開発の結果分点の端数である事は計算の手間に殆んど影響を与えないので寧ろより精度の高い公式が使用さるべきものと考えます。

2. ガウスの平均値法について

$y=f(x)$ なる関数について積分区間 $[a, b]$ を変数変換し，限界を $[-1, 1]$ とする。即ち積分区間の中点に原点を移し且つ新変数 t を用い $x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ (旧 x 軸の $\frac{(b-a)}{2}$ 目盛を新軸の 1 目盛とする）とすれば被積分関数の限界は $[-1, 1]$ となり，$f(x)$ もまた t の関数となる。今これを $g(t)$ で表わす。

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$x=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}t \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$dx=\frac{b-a}{2}dt$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} g(t)\frac{b-a}{2}dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(x)\,dt \qquad \cdots\cdots(3)$$

今区間 $[-1, 1]$ の内に n 個の点 $t_1, t_2, t_3 \cdots t_n$ をとり（小さい方から順に番号をつける）これに対応する関数値を $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$ とし，これに関数に無関係な定数 $w_1, w_2, w_3 \cdots w_n$ を乗じ，これを加え合わせる。

$$A=(b-a)(w_1 y_1+w_2 y_2+\cdots\cdots+w_n y_n) \quad \cdots(4)$$

(4)によって I の近似を考える $w_1+w_2+\cdots\cdots+w_n=1$（後出）とすれば(4)式は

$$A=(b-a)\frac{w_1 y_1+w_2 y_2+\cdots\cdots+w_n y_n}{w_1+w_2+\cdots\cdots+w_n} \text{ となる}$$

これは $y_1, y_2 \cdots y_n$ にそれぞれ重み $w_1, w_2 \cdots w_n$ をつけて平均しそれに区間の長さを乗じたものとなる。このことが平均値法と呼ばれる所以である。このことはまた(3)式より

$$1/2\int_{-1}^{1} g(t)\,dt=w_1 y_1+w_2 y_2+\cdots\cdots+w_n y_n \qquad \cdots\cdots(5)$$

が成立つように t_i と w_i を定める事である。今被積分関数 $g(t)$ をマクローリンの級数展開すると

$$g(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2+a^3 t^3+\cdots\cdots+a_n t^n \qquad \cdots\cdots(6)$$

ただし　$a_0=g(0)$

$a_1=g'(0)/1!$

$a_2=g''(0)/2!$

$\vdots$

$a_n=g^n(0)/n!$ とする

次に　$g(t_1)=y_1$

$g(t_2)=y_2$

$\vdots$

$g(t_n)=y_n$

を(6)式より求めこれを(4)式に代入して

$$A=(b-a)\left\{a_0\sum_{k=1}^{n}w_k+a_1\sum_{k=1}^{n}w_k t_k+a_2\sum_{k=1}^{n}w_k t_k^2+\cdots\cdots+a_n\sum_{k=1}^{n}w_k t_k^n\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

(3)式より

$$I=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}g(t)\,dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}(a_0+a_1 t+a_2 t^2+\cdots\cdots+a_n t_n{}^n)\,dt$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[a_0 t+\frac{a_1}{2}t^2+\frac{a_2}{3}t^3+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n+1}t^{n+1}\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{b-a}{2}\left[a_0\cdot 2+\frac{a_1}{2}\cdot 0+\frac{a_2}{3}\cdot 2+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n+1}\cdot 2\ \left\{=\begin{matrix}n\text{ が偶数のとき }2\\ n\text{ が奇数のとき }0\end{matrix}\right\}\right]$$

$$=(b-a)\left[a_0+0+\frac{a^2}{3}+0+\frac{a_4}{5}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{n+1}\cdot\left\{=\begin{matrix}n\text{ が偶数のとき }\frac{a_n}{x+1}\\ n\text{ が奇数のとき }\ 0\end{matrix}\right\}\right]$$

$a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ の如何にかかわらず $A=I$ であるためには(7)式の夫々係数を比較して

$$\sum_{k=1}^{n}w_k=1,\ \sum_{k=1}^{n}w_k t_k=0,\ \sum_{k=1}^{n}w_k t_k{}^2=1/3,\ \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\sum_{k=1}^{n}w_k t_k{}^n=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & n\text{ が偶数}\\ 0 & n\text{ が奇数}\end{cases} \qquad \cdots\cdots(9)$$

であればよい。今 $I=\int_a^b f(x)dx$ を求める場合，$[a, b]$ 間の n 個の関係値からこれを求める方法を n 点法とすれば $y=f(x)$ が x の $2n-1$ 次の多項式で表わされる場合は理論上誤差零となる。一般の場合は $\sum_{k=1}^{n} w_k t_k$ を $\int ydx$ の近似値を考えて取扱うのでこの場合はそれに伴う誤差が生ずるのである。シンプソンの公式を使用すれば小区間の数を増し区間を小さくすることによって近似度を良くすることが出来るが結果はあくまで近似値である。これに比べて平均値法に於ては前述の如く $(2n-1)$ 次の多項式 $f(x)$ の場合，全く正確な値を求め得る点極めて優れたものとして大いに

活用すべきものと考える。n 点法により計算する場合(9)式より $2n$ 個の式をとり，その連立解として n, t を決定する。

$n=1$

$w_1=1$

$w_1 t_1=0$ の連立解として $w_1=1$, $t_1=0$,

$a=0$, $a=L$ $\quad x_1=\frac{L}{2}+\frac{L}{2}t=\frac{1+t}{2}L=\frac{1}{2}L$

$A=L\times y_{0.5}$

$n=2$

$w_1+w_2=1$

$w_1 t_1+w_2 t_2=0$

$w_1 t_1^2+w_2 t_2^2=\frac{1}{3}$

$w_1 t_1^3+w_2 t_2^3=0$

連立として

$w_1=w_2=\frac{1}{2}$, $t_1=-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $t_2=\sqrt{\frac{1}{3}}$

$x_1=\frac{1+t}{2}L\doteqdot\frac{1-0.5775}{2}L=0.2113\,L$

$x_2=\frac{1+t}{2}L\doteqdot\frac{1.5775}{2}L=0.7888\,L$

$A\doteqdot L\left(\frac{1}{2}y_{0.211}+\frac{1}{2}y_{0.789}\right)$

$=\frac{L}{2}\left(y_{0.211}+y_{0.789}\right)$

$y_{0.211}$, $y_{0.789}$ 夫々 $x=0.211\,L$, $0.789\,L$ における関数値又は x 軸より測った曲線の縦距とす

$n=3$

$w_1+w_2+w_3=1$

$w_1 t_1+w_2 t_2+w_3 t_3=0$

表 1　ガウスの積分公式の数値表

u	t_i	u_i	最大次数	R
2	± 0.5773502692	1/2	3	$0.74\times10^{-2}f^{(4)}(\xi)$
3	± 0.7745966692 0.	5/18 8/18	5	$0.63\times10^{-4}f^{(6)}(\xi)$
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.1739274226 0.3260725774	7	$0.29\times10^{-6}f^{(8)}(\xi)$
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.	0.1184634426 0.2393143352 0.2844444444	9	$0.81\times10^{-9}f^{(10)}(\xi)$
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.0856622462 0.1803807865 0.2339569673	11	$0.15\times10^{-11}f^{(12)}(\xi)$
7	± 0.9491079123 ± 0.7415311856 ± 0.4058451514 0.	0.0647424831 0.1398526958 0.1909150252 0.2089795918	13	$0.21\times10^{-14}f^{(14)}(\xi)$
8	± 0.9602898565 ± 0.7966664774 ± 0.5255324099 ± 0.1834346425	0.0506142681 0.1111905172 0.1568533229 0.1813418917	15	$0.22\times10^{-17}f^{(16)}(\xi)$
9	± 0.9681602395 ± 0.8360311073 ± 0.6133714327 ± 0.3242534234 0.	0.0406371942 0.0903240803 0.1303053482 0.1561735385 0.1651196775	17	$0.18\times10^{-20}f^{(18)}(\xi)$
10	± 0.9739065285 ± 0.8650633667 ± 0.6794095683 ± 0.4333953941 ± 0.1488743390	0.0333356722 0.0747256746 0.1095431813 0.1346333597 0.1477621124	19	$0.12\times10^{-23}f^{(20)}(\xi)$

註　完全に積分値と一致する有理多項式の次数を最大次数の欄に記入す。

$$w_1 t_1^2+w_2 t_2^2+w_3 t_3^2=\frac{1}{3}$$
$$w_1 t_1^3+w_2 t_2^3+w_3 t_3^3=0$$
$$w_1 t_1^4+w_2 t_2^4+w_3 t_3^4=\frac{1}{5}$$
$$w_1 t_1^5+w_2 t_2^5+w_3 t_3^5=0$$

連立として

$$w_1=w_3=\frac{5}{18},\quad w_2=\frac{8}{18}$$
$$t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}},\quad t_2=0,\quad t_3=\sqrt{\frac{3}{5}}$$
$$A=\frac{L}{18}\left\{5\,(y_{0.113}+y_{0.887})+8\,y_{0.500}\right\}$$

$n=4$

$$w_1=w_2+w_3+w_4=1$$
$$w_1 t_1+w_2 t_2+w_3 t_3+w_4 t_4=0$$
$$w_1 t_1^2+w_2 t_2^2+w_3 t_3^2+w_4 t_4^2=\frac{1}{3}$$
$$w_1 t_1^3+w_2 t_2^3+w_3 t_3^3+w_4 t_4^3=0$$
$$w_1 t_1^4+w_2 t_2^4+w_3 t_3^4+w_4 t_4^4=\frac{1}{5}$$
$$w_1 t_1^5+w_2 t_2^5+w_3 t_3^5+w_4 t_4^5=0$$
$$w_1 t_1^6+w_2 t_2^6+w_3 t_3^6+w_4 t_4^6=\frac{1}{7}$$
$$w_1 t_1^7+w_2 t_2^7+w_3 t_3^7+w_4 t_4^7=0$$

連立として

$$w_1=w_4=\frac{18-\sqrt{30}}{72}$$
$$w_2=w_3=\frac{18+\sqrt{30}}{72}$$
$$t_1=-\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$t_2=-\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$t_3=\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$t_4=\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$A=L\left\{0.174\,(y_{0.069}+y_{0.931})+0.326\,(y_{0.330}+y_{0.670})\right\}$$

$n=5$ 以上についても同様に求め得る。なお実用の場合別表(1)を参照せられたい。

3. ガウスの平均値法による求積例

図1は $y=-0.000434521\,x^5+0.0254996\,x^4-0.523411\,x^3+4.30621\,x^2-11.7274\,x+14$ を図にしたものである。この曲線と x 軸と $x=0$, $y=22$ の縦線との間の面積 A を求める，積分によれば，

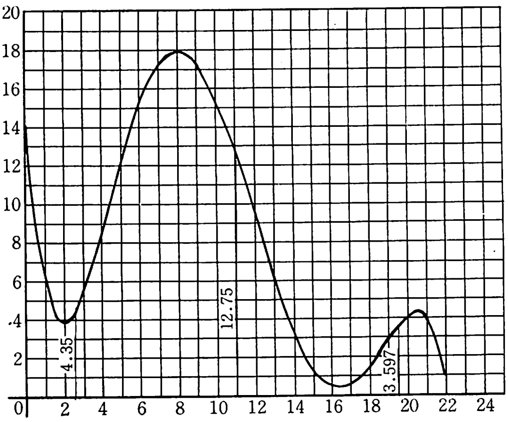

図1　$y=-0.000434521x^5+0.0254996x^4-0.523411x^3+4.30621x^2-11.7274x+14$ のグラフ

$$I=\Big[-0.000072420\,x^6+0.00509992\,x^5-0.1308527\,x^4+1.435403\,x^3-5.8637\,x^2+14\,x\Big]_0^{22}=173.22$$

1点法によれば

$$A_1=L\times y_{0.5}=22\times 12.75=280.5$$

2点法によれば

$$A_2=\frac{L}{2}\,(y_{0.211}+y_{0.789}=\frac{22}{2}(10.901+0.660)=127.17$$

3点法によれば

$$A_3=\frac{L}{18}\left\{5\,(y_{0.113}+y_{0.887})+8\,y_{0.500}\right\}=\frac{22}{18}\left\{5\,(4.350+3.600)+8\times 12.750\right\}=173.25$$

4点法によると

$$A_4=L\left\{0.174\,(y_{0.069}+y_{0.931})+0.326\,(y_{0.330}+y_{0.670})\right\}=22\left\{0.174\,(4.42+4.32)+0.326\,(17.62+1.87)\right\}=173.25$$

となり3点法に於て積分値と極めて良好な一致を示し，4点法に於ては3点法と同一数値が得られる。更にこれ以上点数を増しても数値の変化は認められない。又図形上よりも略5次曲線なることを推定し得られ，3点法にて求め得らるる事を知るのである。次に任意の曲線図形の図上面積計算に於ては上述の理を用いて x 点の関係値の代りに図上実測の数値を用うべ

きものとす。この場合，人間の目で2点を2点として見分け得る分解限度は普通0.1粍とされているのでこれを考慮に入れて必要精度に応じた縮尺による図面によって計測算定しなければならない。

4. 平均値法の測量学に於ける応用について

曲線形の求積を伴う各種数値計算，理論分野に活用して多大の効果を得べきもので，河川測量における河底が曲線である横断面の算定に，平均流速の決定，流量の算定，またそれ等の算定の為の測定位置の決定（たとえば鉛直平均流速算出のため流速計にて流速測定すべき位置として鉛直流速曲線が水深 h の2～3次曲線で表わされるものとすれば平均流速を求めるためには水面より $0.211\,h$ および $0.789\,h$ の二点の流速を測定することによって極めて正確な値が得られる。)

其の他ダムの貯水量，堤体体積，あるいは地均工事における土工量の算出などに利用して最も合理的に然も従来より一段と正確，迅速に得られる利点がある。今後引続き具体的にいかに簡便，省力化に有効かにつき研究を進めて行くつもりである。

5. 結　　語

滑らかな曲線形の求積に於て平均値法を用いれば比較的少数の測定値によって正確な値が容易に求め得られる。

また曲線の理論形が定まっている場合はいかなる点を測定すればよいかを知り得るので無駄のない極めて能率的，有効な測定が可能である。猶これは応用数学履修前の学生への理解と，その応用の為めに書いたものである。

参考図書文献

(1) 計算機のための数値計算：宇野利雄著，朝倉書店，1963.

(2) 計算法：渡辺信夫著，朝倉書店，1964.

(3) 平均値法による流量算定式について：春日屋伸昌，土木学会誌，38巻7号.

(4) シンプソン公式により平均値法へ：春日屋伸昌，測量，1955.5.

(5) 数値計算（近代数学新書)：一松信著，至文堂

（昭和48年11月30日受理）