非平面グラフにおける窓行列

久　末　博　美*

Window Matrix on the Nonplanar Graph

Hiromi HISASUE

要　旨

本文は，グラフの領域を定める1つの基本単位として，窓を定義し，それから作られる窓行列の性質を非平面グラフについて考察している。

Synopsis

In this paper, auther introduced to window, which is a unit of region on a graph, and discussed property of window matrix on the nooplanar graph.

1. 序

すべての有限グラフは3次元空間に1つの幾何学的実現をもっている。グラフが2次元平面のみ幾何学的実現をもつ時，平面グラフ（planar graph）といわれ，それ以外は非平面グラフ（nonplanar graph）といわれる。すなわち，平面又は球面上に節点以外に交点をもたないで，表わせるグラフが平面グラフであり，それ以外が非平面グラフである。

一般に図1に示すような2つの基本的な非平面グラフ（kuratowski グラフといわれる）を部分グラフとしてもつグラフは非平面グラフであり，逆に非平面グラフであれば，それが必ず kuratowski グラフを部分グラフとしてもつことが知られている。

幾何学的に実現されたグラフにおいて，節点と枝が番号づけられると，環状に連結する枝の集合によって，領域すなわち面が定められる。本文はこの面の基本単位として，窓（window）を定義し，これによって作られる行列の性質を，平面グラフよりさらに非平面グラフに発展させて考察し，線形ベクトル空間での意味を考える。

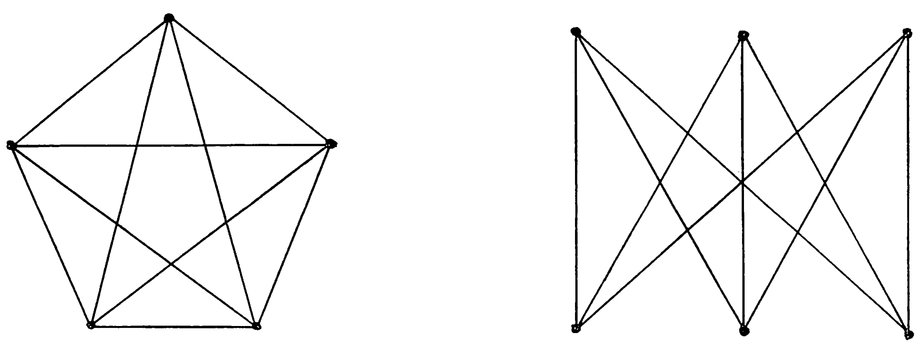

図　1

2. 本　　論

(1) 窓の定義

平面あるいは球面上に交さなく描写されたグラフにおいては，各枝によって分割された領域（外部領域も含む）を窓という。この窓を周囲すなわち境界の枝の集合によって表現すると，各枝が番号づけられたグラフであれば，そのグラフの形態から窓は一意に定まる。平面描写できない非平面グラフにおいては，この

* 講師　電気工学科

様な窓は考えることができない。しかし，グラフの1つの節点に接続する2本の枝を含む閉路を考え，この閉路を作る最小の数の枝からなるものとして窓をとらえると，次の様に，非平面グラフにおける窓を定義することができる。

『幾何学的に実現され，節点と枝が番号づけられたグラフにおいて，1つの節点に接続する枝の中から，2つの枝をとり出し，この枝と閉路をなして連結する枝の集合によって構成される面の中で，最小の数の枝の集合によって作られる面を窓という。』

以上の様にして定義した窓は，境界の枝の集合によって表現される。従って当然グラフのループ集合に含まれるものである。

一般にループを考える場合，木（tree）という概念から基本ループ集合を考え，これから全てのループが構成されるものとして，とらえられる。そして独立なループ，すなわち基本ループの数はグラフの零度（$e-v+1$）である。この独立なループの集合において，グラフの全ての枝が包含されていれば，グラフの演算により，全てのループが作られるわけであるから，木という概念を考えなくてもよいはずである。従って，この独立ループを定める1つの指針として窓の意味が考えられる。
ある窓の集合から，そのグラフの全てのループが作られる時，この集合に属する窓を独立な窓とする。この数は零度（$e-v+1$）である。

平面描写されたグラフに1本の枝を加えて非平面グラフとなるような場合，そのグラフの零度は（$e-n+1$）:（e：枝の数，n：節点の数）であるから，1だけ増加する。すなわち独立ループは1つ増すだけである。この時，1本の枝によって多数の窓が生じる時，これを同値な窓と呼び，その中で独立な窓は1つとなる。

(2) 窓　行　列

以上のようにして定義した窓から，次のような窓行列が定義される。

$$D_a=[d_{ij}]_{w\times e}\quad \begin{array}{l} w：\text{窓の数} \\ e：\text{枝の数} \end{array}$$

$d_{ij}=1$　e_j が w_i の周に含まれる，

$d_{ij}=0$　e_j が w_i の周に含まれない，

独立な窓の集合から作られる行列，すなわち，

$$D=[d_{ij}]_{(e-n+1)\times e}$$

を窓部分行列とする。

窓部分行列 D において，グラフの各々の枝は，少なくとも1つ，いずれかの窓に含まれていなければならない。又1つの枝は少くとも1つの独立な窓の境界である。従って，各々の窓は枝によって連結されていなければならない。すなわち，非平面グラフにおいて，独立な窓は，枝によって連結される（$e-v+1$）の窓の集合であるといえる。

次にグラフにおいて，ある木 T による基本ループ行列 B_f と，窓部分行列 D を考え，それらの第 i 列が同一の枝に対応し，最初の（$v-1$）の列を木の枝に，残りの（$e-v+1$）の列を補木の枝に対応するように配列する。すなわち，

$$D=[D_{\mathrm{T}},\ D_{\mathrm{L}}]$$
$$B_f=[B_{\mathrm{R}},\ U_{\mathrm{N}}]$$

とおける。又基本カットセット行列 C_f は

$$C_f=[U_{\mathrm{R}},\ C_{\mathrm{N}}]$$

と書ける。ここで U_{N}, U_{R} は単位行列，又 $R=v-1$, $N=e-v+1$, である。それで，非平面グラフにおいても，平面グラフと同様な以下の関係が導かれる。

$D\cdot C_f{}^t=0$ より

$$[D_{\mathrm{T}},\ D_{\mathrm{L}}]\cdot\begin{bmatrix} U_{\mathrm{R}}{}^t \\ \cdot \\ C_{\mathrm{N}}{}^t \end{bmatrix}=0$$

$$D_{\mathrm{T}}\cdot U_{\mathrm{R}}{}^t+D_{\mathrm{L}}C_{\mathrm{N}}{}^t=0$$

$U_{\mathrm{R}}{}^t=1$, 又 mod 2 の算法で

$$D_{\mathrm{T}}=D_{\mathrm{L}}C_{\mathrm{N}}{}^t$$
$$C_{\mathrm{N}}{}^t=D_{\mathrm{L}}{}^{-1}\cdot D_{\mathrm{T}}$$

$C_{\mathrm{N}}{}^tB_{\mathrm{R}}$ より

$$B_{\mathrm{R}}=D_{\mathrm{L}}{}^{-1}D_{\mathrm{T}}$$
$$B_f=[B_{\mathrm{R}}\cdot U_{\mathrm{N}}]=[D_{\mathrm{L}}{}^{-1}\cdot D_{\mathrm{T}},\ U_{\mathrm{N}}]$$
$$=D_{\mathrm{L}}{}^{-1}\cdot D.$$

《例》

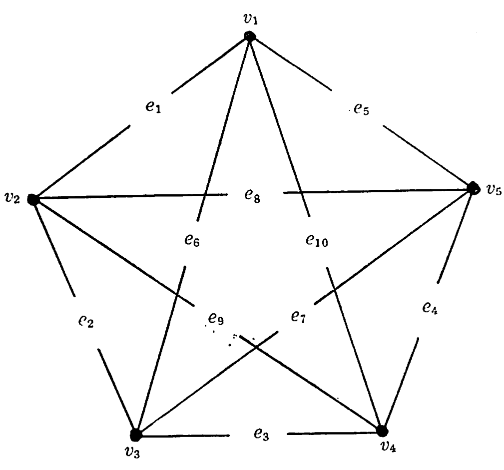

図 2

図2に示す様な kuratowski グラフについて窓を求めると，次の様になる。

$$\begin{array}{ll} w_1(e_1,\ e_2,\ e_6) & w_6\,(e_3,\ e_4,\ e_7) \\ w_2(e_1,\ e_5,\ e_8) & w_7\,(e_3,\ e_6,\ e_{10}) \\ w_3(e_1,\ e_9,\ e_{10}) & w_8\,(e_4,\ e_5,\ e_{10}) \\ w_4(e_2,\ e_3,\ e_9) & w_9\,(e_4,\ e_8,\ e_9) \\ w_5(e_2,\ e_8,\ e_7) & w_{10}(e_5,\ e_6,\ e_7) \end{array}$$

これらの窓から6コの連結した窓をとり，窓部分行 D 列を作る。そして，木として $T=(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ を選び，列を木と補木に分けて配列すると次の様になる。

$$D=\begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_5 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc:cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}=[D_T,\ D_L]$$

これから D_L の逆行列を求めると，

$$D_L^{-1}=\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

そして，$D_L^{-1}\cdot D$ の演算を行うと，次に示す基本ループ行列 B_f に等しくなる。

$$B_f=\begin{array}{c} \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc:cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e^5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc:cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

(3) 線形ベクトル空間による表現

与えられるグラフ G のすべての部分グラフの集合からなる線形ベクトル空間 v_G を考える。この空間は mod 2 で，ベクトルの和は ring sum の演算となる e 次元空間（e：枝の数）であり，座標系はグラフの1つの枝からなる要素によって定められる。[(2)] それで，接続部分行列 A と，窓部分行列 D によって，次の様な部分空間が定義される。

v_C：接続部分行列 A の行の全ての線形結合の集合

v_B：窓部分行列 D の行の全ての線形結合の集合

この空間は次の性質をもっている。

v_C において，2^{v-1} のベクトルがあり，これらの各々は，カットセット，又はカットセットの disjoint union である。

v_B において，2^{e-v+1} のベクトルがあり，これらの各々は，ループ又はループの disjoint union である。

従って，$(e-v+1)$ の独立な窓から，全ての窓が作られ，窓行列の行の演算により，全てのループが形成されるのである。

3. 結

グラフを表現する行列，すなわち接続行列 A，ループ行列 B，カットセット行列 C，及び窓行列 D は，全て枝で表現される。窓（2次元要素）は枝によって連結され，枝（1次元要素）は節点（0次元要素）によって連結されるものである。幾何学的描写という観点からすれば，このように枝を規定するものは節点だけでなく，窓に注目して，表現することができる。

参考文献

(1) 久末，安田「Nonplanar グラフにおける窓行列」47年度電気四学会北海道支部連合大会。

(2) Seshu, Leed「Linear graph and Electrical networks」Addison-Wesley. (1961)

（昭和48年11月30日受理）