

軸方向に Hinge で結合された棒状要素による 平面構造の固有振動解析について

沢 田 知 之*
能 町 純 雄**
松 岡 健 一***

On Free Vibration of a Plane Structure Made-up of
Hinge Connected Bar Elements

Tomoyuki SAWADA
Sumio. G. NOMACHI
Kenichi. G. MATSUOKA

要 旨

本稿は棒状要素が軸方向に Hinge—結合された平面構造の固有振動挙動を偏微分、偏差分方程式で表わし、Fourier—一定和変換および Fourier-sine 変換を用いて解析し、理論値と実験値の比較検討を行なったものである。

Synopsis

In this paper, the behaviour of the free vibration concerning the plane structure made-up of the bar elements, which are connected with one another by longwise hinge, is described in partial differential and partial difference equations, which are solved by means of Fourier Integration Transforms and Finite Fourier-sine Transforms.

The analytical results are compared with the experimental ones in the case of acrylite cylindrical bar elements.

1. 理 論 式

本解析にあたっては棒要素の断面変形は考慮せず、又棒要素は弾性床上有ると仮定する。要素における鉛直変位、軸廻りの回転変位を鉛直力と戻りモーメントのつり合いから求め、hinge 接合点での力のつり合いを満足するように誘導された微分差分方程式を span—直角方向には Fourier—一定和変換を行ない、span—方向には有限—Fourier 変換を行なう。又、境界条件において剪断力のつり合いで慣性抵抗を考慮し、固定端におけるたわみ角が無いことと合わせて、境界値を知り、正弦振動を仮定することによって固有

振動数判別式を導き、解析を進める。今例として頂部で軸方向に一方は固定、他方は自由であり、span—直角方向には単純支持された場合を取り上げる。

ここで、 ℓ は span 長、 n は円筒形棒状要素数自由端を $x=0$ とする。

§ 1. 力の釣り合い

図—1 の如くの棒状要素に対して、曲げおよび戻りに関する釣り合い式が次の様に示される。

$$EI \cdot \frac{w_{r+1}^{IV}(x) + w_r^{IV}(x)}{2} = q_r' - \frac{w_{r+1}(x) + w_r(x)}{2} \cdot K \quad (1)$$

$$GJ \cdot \frac{\ddot{w}_{r+1}(x) - \ddot{w}_r(x)}{2a} = -2a \cdot q_r'' + \frac{K \cdot a}{6} \{w_{r+1}(x) - w_r(x)\} \quad (2)$$

* 講師 土木工学科

** 教授 北海道大学工学部土木工学科

*** 助教授 室蘭工業大学土木工学科

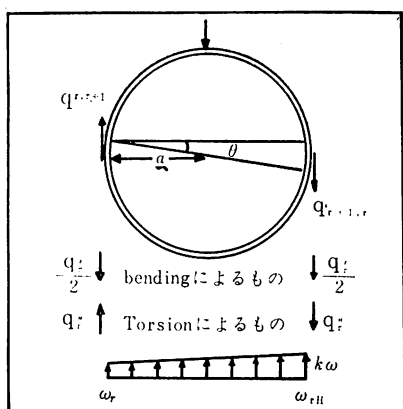


図 1

ここで EI : 曲げ剛性 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$)
 GJ : 捩り剛性 ($\text{kg}\cdot\text{cm}^2$)
 k : 地盤反力係数 (kg/cm^3)
 w : たわみ (cm)
 K : $20 ak$ (kg/cm^2)
 a : 要素の半径 (cm)

図より r と $r+1$ 側の釣り合いは

$$q_{r, r+1} = q_r'' - \frac{q_r'}{2} \quad (3)$$

$$q_{r+1, r} = q_r'' + \frac{q_r'}{2} \quad (4)$$

故に

$$q_{r, r+1} = \frac{K}{12} \{w_{r+1}(x) - w_r(x)\} - \frac{GJ}{4a^2} \{\ddot{w}_{r+1}(x) - \ddot{w}_r(x)\} - \frac{EI}{4} \{w_{r+1}^{IV}(x) + w_r^{IV}(x)\} - \frac{K}{4} \{w_{r+1}(x) + w_r(x)\} \quad (5)$$

$$a_{r, r-1} = \frac{K}{12} \{w_r(x) - w_{r-1}(x)\} - \frac{GJ}{4a^2} \{\ddot{w}_r(x) - \ddot{w}_{r-1}(x)\} + \frac{EI}{4} \{w_r^{IV}(x) + w_{r-1}^{IV}(x)\} + \frac{K}{4} \{w_r(x) + w_{r-1}(x)\} \quad (6)$$

又、節点条件より

$$q_{r, r-1} - q_{r, r+1} = 0 \quad (7)$$

よって(5)(6)(7)より

$$EI \cdot \frac{\{w_{r+1}^{IV}(x) + 2w_r^{IV}(x) + w_{r-1}^{IV}(x)\}}{4} + \frac{K \cdot \{w_{r+1}(x) + 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\}}{4} + GJ \cdot \frac{\{\ddot{w}_{r+1}(x) - 2\ddot{w}_r(x) + \ddot{w}_{r-1}(x)\}}{4a^2} - \frac{K \cdot \{w_{r+1}(x) - 2w_r(x) + w_{r-1}(x)\}}{12} = 0 \quad (8)$$

(8)式を差分で表わすと

$$\frac{EI}{4} \left(\Delta^2 w_{r-1}(x) + 4w_r(x) + \frac{GJ}{4a^2} \Delta^2 \ddot{w}_{r-1}(x) + \frac{K}{6} \Delta^2 w_{r-1}(x) + K \cdot w_r(x) \right) = 0 \quad (9)$$

ここで

$$\Delta w_r(x) = w_{r+1}(x) - w_r(x)$$

$$\Delta^3 w_r(x) = w_{r+2}(x) - 2w_{r+1}(x) + w_r(x)$$

故に(9)式に各々(10)~(12)に示す如くの Fourier-sine 定 和分変換および有限 —Fourier Span 変換を施す。

一方 Span—直角方向には単純支持であることから(13)

~(15)であるので、これらを考慮し整理すると(16)となる。

$$\sum_{r=1}^{n-1} \Delta^2 f(r-1) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r = - \sin \frac{i\pi}{n} \left\{ (-1)^i f(n) - f(0) \right\} - Di \sum_{r=1}^{n-1} f(r) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (10)$$

$$Di = 2 \times (1 - \cos \frac{i\pi}{n})$$

$$\int_0^l \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx = \left[-\left(\frac{m\pi}{l} \right) \cdot f''(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right]_0^l + \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \cdot f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right]_0^l + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx \quad (11)$$

$$\int_0^l \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx = \left[-\left(\frac{m\pi}{l} \right) \cdot f(x) \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \right]_0^l - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \cdot \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot dx \quad (12)$$

$$w_o(x) = w_n(x) = 0 \quad (13)$$

$$w_o(x) = \ddot{w}_n(x) = 0 \quad (14)$$

$$\ddot{w}_r(x) = w_r(l) = 0 \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{EI}{4} (D_i - 4) \cdot \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 = D_i \frac{GJ}{4a^2} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - \frac{K}{6} (6 - D_i) \right\} \cdot \bar{\ddot{w}} = \frac{EI}{4} D_i \cdot \left(\frac{m\pi}{l} \right) \cdot (-1)^m \cdot \ddot{w}_i(l) - EI \cdot \left(\frac{m\pi}{l} \right) \cdot (-1)^m \cdot \ddot{w}_i(l) - EI \cdot \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \cdot \bar{w}(0) - \frac{GJ}{4a^2} D_i \left(\frac{m\pi}{l} \right) \cdot \bar{w}_i(0) \quad (16)$$

ここで

$$\bar{w}_i(x) = \sum_{r=1}^{n-1} w_r(x) \cdot \sin \frac{i\pi r}{n}$$

$$\bar{\ddot{w}}_i = \int_0^l \bar{w}_i(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x$$

$$\bar{w}_i(0) = \sum_{r=1}^{n-1} w_r(0) \cdot \sin \frac{i\pi r}{n}$$

$$\ddot{w}_i(l) = \sum_{r=1}^{n-1} \ddot{w}_r(l) \cdot \sin \frac{i\pi r}{n}$$

次に(16)式に(17)に示す様な Fourier-sine 逆変換を施すと(18)で表わされる。

$$\bar{w}_i(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\ddot{w}}_i \cdot \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (17)$$

$$\therefore \bar{w}_i(x) = \frac{-l^2}{2\pi^2\alpha\beta} \mathbf{P}(1-\xi) \cdot \ddot{w}_i(l) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}(\xi) \cdot \bar{w}_i(0) + \mathbf{Q}(\xi) \cdot \bar{m}_i(0) \quad (18)$$

ここで

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad A = \frac{GJ \cdot l^2 \cdot D_i}{EI a^2 \pi^2 (4 - D_i)}, \quad B = \frac{2 \cdot (6 - D_i) K \cdot l^4}{3 \cdot (4 - D_i) EI \pi^4}$$

$$C = \sqrt{B}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{A + 2C}}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2C - A}}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{2\alpha\beta \cdot m}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\beta^2} \cdot \sin m\pi\xi \\ &= \frac{\sinh \alpha\pi(2-\xi) \cdot \sin 3\pi\xi - \sinh \alpha\pi\xi \cdot \sin \beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{m(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(m^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cdot \sin m\pi\xi \\ &= \frac{\cosh \alpha\pi(2-\xi) \cdot \cos \beta\pi\xi - \cosh \alpha\pi\xi \cdot \cos \beta\pi(2-\xi)}{\cosh 2\alpha\pi - \cos 2\beta\pi} \end{aligned} \quad (20)$$

§2. 境界条件

次に $x=0$ 端における剪断力のつり合いと $x=l$ 端における、たわみ角 $=0$ の条件より境界値を求め得る、

$$Q_{r, r-1}^{(0)} - Q_{r, r+1}^{(0)} = P_r \quad (21)$$

$$\therefore \frac{EI}{4} \left\{ \ddot{w}_{r+1}^{(0)} + 2\ddot{w}_r^{(0)} + \ddot{w}_{r-1}^{(0)} \right\} + \frac{4a^2}{GJ} \left\{ \dot{w}_{r+1}^{(0)} - 2\dot{w}_r^{(0)} + \dot{w}_{r-1}^{(0)} \right\} - P_r = 0 \quad (22)$$

ここで P_r のかわりに 慣性抵抗 $-\frac{\gamma \cdot S}{g} \cdot \ddot{w}_{r, t}$ とおき差分式で表わすと次の如く示される。

$$\frac{EI}{4} \left\{ \ddot{w}_{r+1}^{(0)} + 2\ddot{w}_r^{(0)} + \ddot{w}_{r-1}^{(0)} \right\} + \frac{GJ}{4a^2} \dot{w}_{r-1}^{(0)} + \frac{\gamma \cdot S}{g} \ddot{w}_{r, t} = 0 \quad (23)$$

γ : 円筒形棒状要素の単位体積当り重量

S : 円筒形棒状要素の断面積

g : 重力加速度 (980 cm/sec²)

(23)式を Fourier-sine 定和分変換公式により n 次の如く示すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot \ddot{w}_i(0) - \frac{GJ}{4a^2} \cdot \dot{w}_i(0) &= \ddot{w}_{r, t} \\ \ddot{w}_{r, t} &= \sum \frac{\gamma \cdot S}{g} \cdot \ddot{w}_{r, t} \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \end{aligned} \quad (24)$$

次に $x = \ell$ 端 (固定端) におけるたわみ角 $= 0$ より, (18)式より

$$\begin{aligned} \ddot{w}_i(\ell) &= \frac{\ell^2}{2\pi^2\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}'(1 - \xi) \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}'(\xi) \cdot \bar{w}_i(0) + \mathbf{Q}'(\xi) \cdot \bar{w}_i(0) \quad \text{ここで } \xi = 1 \\ &+ \mathbf{A} \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \mathbf{B} \cdot \bar{w}_i(0) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここで, 正弦振動を仮定すると

$$\begin{aligned} w_{r, t} &= w_r \cdot \sin pt \quad p: \text{円振動数} \\ \therefore \ddot{w}_{r, t} &= -p^2 \cdot w_r \cdot \sin pt \end{aligned} \quad (26)$$

また(18)式より次なることが示される。

$$\begin{aligned} \ddot{w}_i(0) &= \frac{\ell^2}{2\pi^2\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}'(1) \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \cdot \mathbf{P}'(0) \cdot \bar{w}_i(0) + \mathbf{Q}'(0) \cdot \bar{w}_i(0) \\ &= \mathbf{E} \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \mathbf{F} \cdot \bar{w}_i(0) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_i(0) &= \frac{\ell^2}{2\pi^2\alpha\beta\ell^2} \{ \alpha^2\pi^2 \cdot \mathbf{P}'(1) - 2\alpha\pi^2\beta \cdot \mathbf{Q}'(1) - \beta^2\pi^2\mathbf{P}'(1) \} \cdot \ddot{w}_i(\ell) \\ &+ \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\pi^2\alpha\beta\ell^2} \{ \alpha^2\pi^2 \cdot \mathbf{P}'(0) - 2\alpha\beta\pi^2 \cdot \mathbf{Q}'(0) - \beta^2\pi^2 \cdot \mathbf{P}'(0) \} \cdot \bar{w}_i(0) \\ &+ \frac{1}{\ell^2} \{ 2\alpha\beta\pi^2 \cdot \mathbf{P}'(0) + (\alpha^2 - \beta^2)\pi^2 \cdot \mathbf{Q}_i(0) \} \cdot \bar{w}_i(0) = \mathbf{C} \cdot \ddot{w}_i(\ell) + \mathbf{D} \cdot \bar{w}_i(0) \end{aligned} \quad (28)$$

よって(26)(27)(28)式を(24)式に代入し, 整理すると次の如く示される。

$$\left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot \mathbf{C} - \frac{GJ}{4a^2} \cdot D_i \cdot \mathbf{E} \right\} \ddot{w}_i(\ell) + \left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot \mathbf{D} - \frac{GJ}{4a^2} \cdot D_i \cdot \mathbf{F} - p^2 \cdot \frac{\gamma \cdot S}{g} \right\} \bar{w}_i(0) = 0 \quad (29)$$

故に, (25)式より $\ddot{w}_i(\ell) = -\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \cdot \bar{w}_i(0)$ なる関係を(29)式に代入することにより, 次に示す振動数判別式を得る。

$$P = \sqrt{\frac{\gamma \cdot S}{g} \left\{ \frac{EI}{4} (4 - D_i) \cdot (\mathbf{D} - \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}) + \frac{GJ}{4a^2} (D_i \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} - D_i \mathbf{F}) \right\}} \quad (30)$$

よって Mode は(29/30)式より $\bar{w}_i(x)$ を知ると次に示す如くの Fourier-sine 定和文逆変換公式により求めることができる。

$$\therefore w_r(x) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{w}_i(x) \cdot \sin \frac{i\pi}{n} r \quad (31)$$

§ 3. 数値計算例

数値計算は、室蘭工業大学電子計算機室の FACOM-231 ALGOL で行なった。図-2 に Flow-chart を示し、図-3~4 に結果を掲載した。尚、数値計算に用いた DATA は次の通り

振動周期(sec) (1本の場合)

1次	0.0160	0.0494
2次	0.0056	0.0080

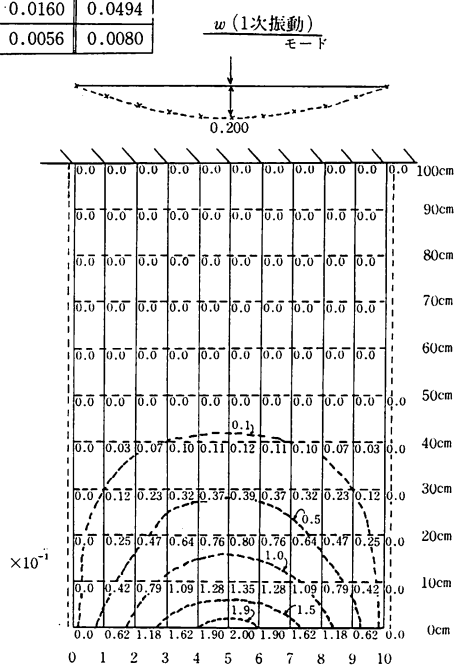


図-3 mode

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$G = 8.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$l = 100 \text{ cm}$$

$$a = 2.0 \text{ cm}$$

振動(固有値・モード) flow chart

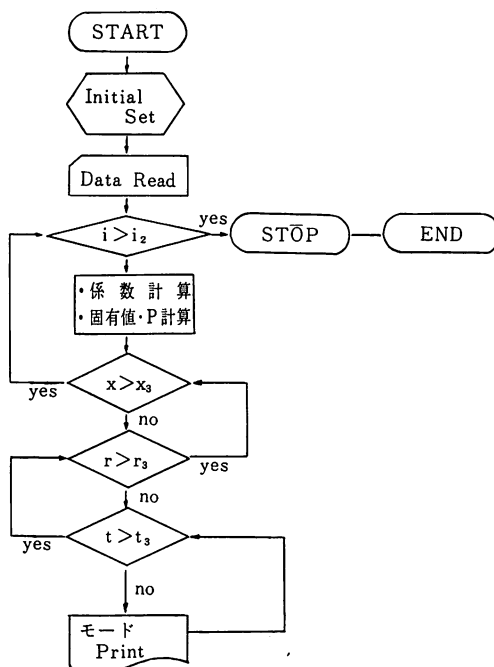


図-2 flow-chart

2. 実験

§1. 実験模型

1) 供試体材料

○ アクリル管

三菱アクリライト

(内径 2.6 cm 外径 3.0 cm 長さ 82 cm) : 9 本

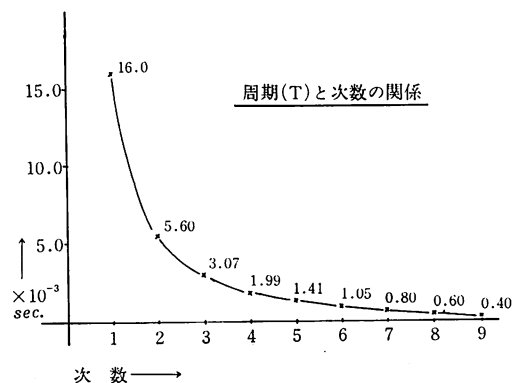


図-4 周期と次数の関係

§ 4. 考 察

図-3 には固有振動周期と mode を示した。 $k \neq 0$

(0.10) として理論計算を行ない、1 本の要素 ($k=0.0$) の場合との比較を示した。これは、1 本の要素の場合より、平面構造とした方が小さい傾向を示している。図-4 は、周期と span- 直角方向の振動次数の関係を示したが 1 次以下急速に減少し、あとはゆるやかに変化することを示し、静止 ($T=0$) へ向かう傾向を示している。

(内径 1.4 cm 外径 1.8 cm 長さ 82 cm) : 2 本

◦ strain-gage

共和電業の箔フェスデルゲージ

(active gage 及び dummy gage として)

Type: KFC-2-C1-11

Gage length: 2 mm

Resistance: $120.4 \pm 0.2 \Omega$

Gage Factor: $2.08 \pm 1.5\%$

備考: 単軸, 片端リード

◦ 接着剤

gage 接着用 : セメダイ 3000

ンアクリル接着用: gage 用接着剤 BC 11

◦ リード線

エナメル線及びビニール線

◦ 押さえ板

(L字型の木材板): $2.7 \times 4.1 \times 1.3$ cm

◦ ピアノ線 : 8 本

◦ ギター弦巻き : 8 個

◦ アクリルの E : $40,000 \text{ kg/cm}^2$

◦ 弾性床

(マットレスを使用, アクリル管)

($5 \text{ mm} \times 0.8 \text{ l}$ を有効面積として)

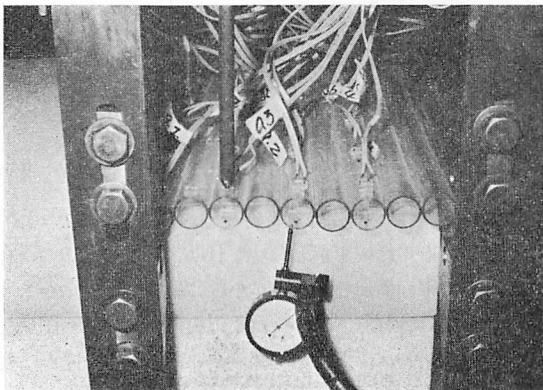
(載荷して K—値決定: $K = 1.73 \text{ kg/cm}$)

2) 供試体の製作

◦ 単純支持: 9本の管の両側に各々1本ずつ $\phi 18$ mm の補助管をつけ, その上下に片側を補助管と同一径で面取りをしたプレートにスパン方向に接着し, 支持台付きのローラーで上下をはさんで単純支持とした。

◦ ヒンズ結合: 理論では, スパン方向に連続的にヒンズ結合という条件であるが, 本実験においては, スパン方向に, 理論計算地点付近に管に穴をあけて, ピアノ線を通し, 一方を固定し, 他方をギターの弦巻きを用いて, 締めつけの調整方式とした。

◦ 固定端: スパン直角方向に2板の鉄製プレートを用いて上下から支持台に押え固定端とした。



供試体写真 ①

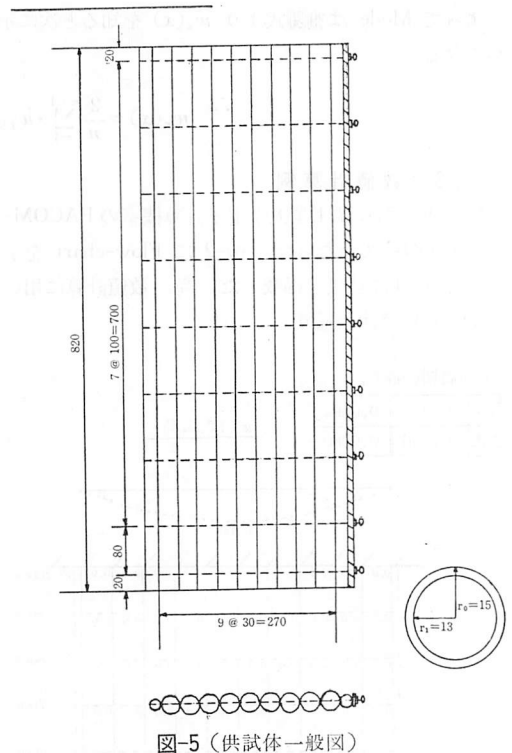


図-5 (供試体一般図)

尚, 供試体の一般図を図-5に示す。

3) 載荷および測定方法

実験は $x=0$ 端 (自由端) において中央パイロに糸でおもりを吊り下げ糸を切ることにより供試体に振動を起し, 動ひずみ測定器 (6点測定用) によって測定し, Rapicorder に記録して周期を求めた。

供試体写真と Rapicorder 写真を各々次に示す。



Rapicorder 写真 ②

§ 2. 実験値と理論値の比較

実験値と理論値の比較を図-7に周期とモード図、

図-8に周期と次数との関係図、図-6に実験結果の波形図を示した。

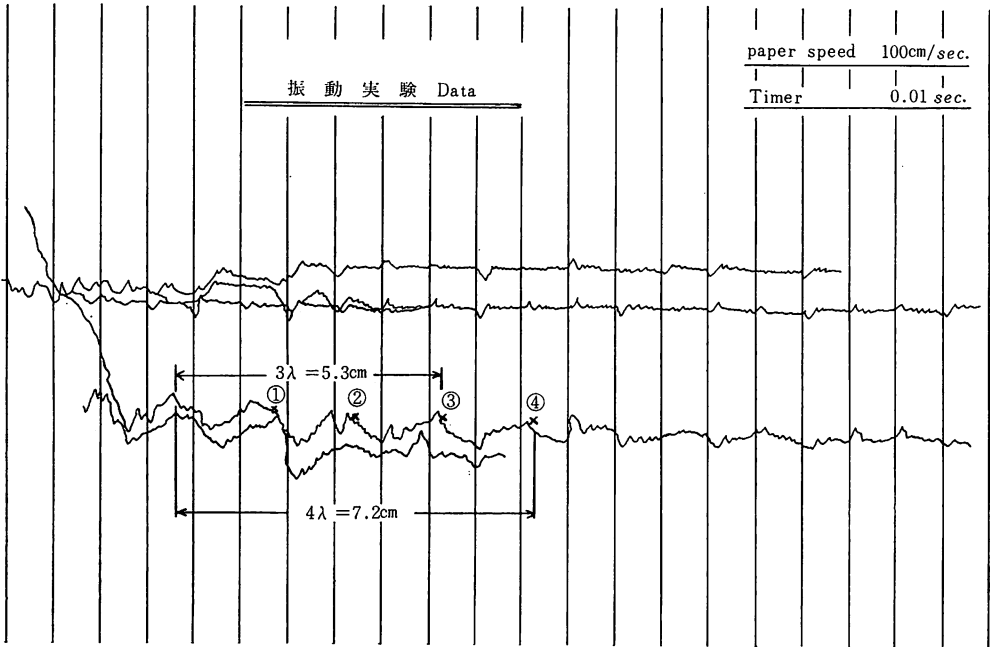


図-6 実験結果の波形図

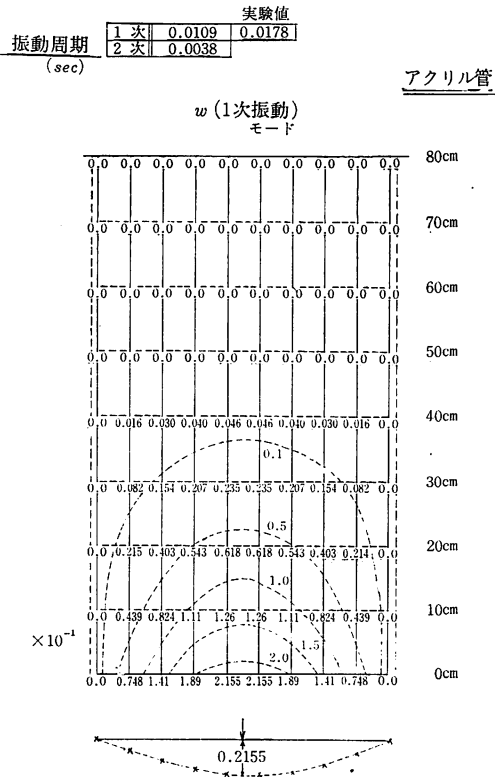


図-7 周期とモード図

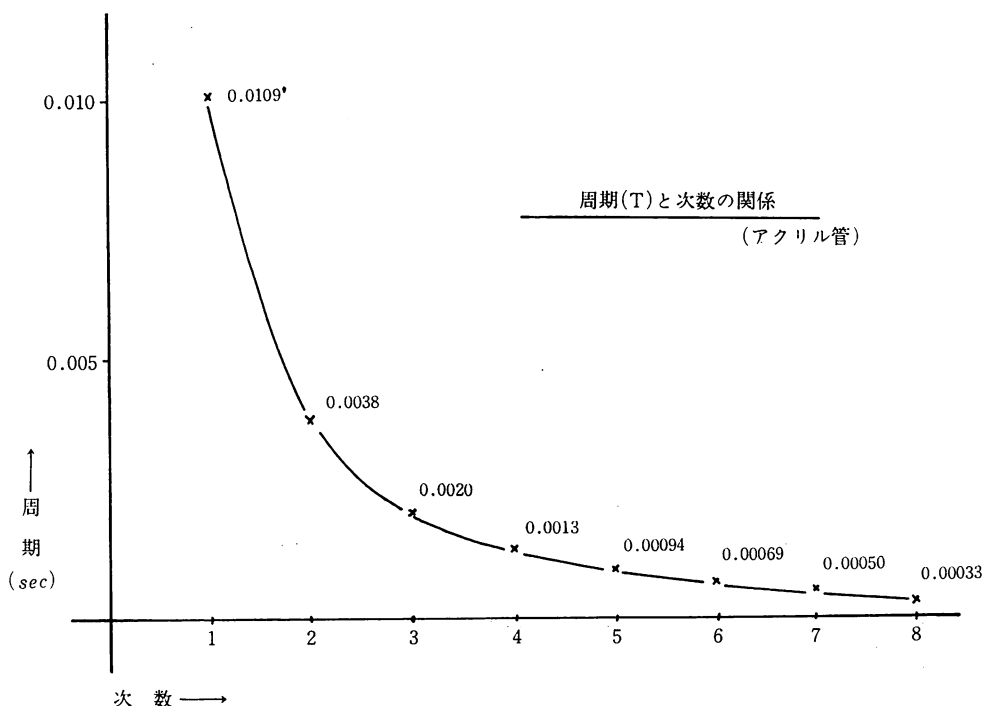


図-8 周期と次数との関係

§3. 考 察

Bridge box, dynamic strain meter などの関係から, gage 数に制限が加わり, 5 点の測点しか得られなかった。図-8 に示す如くの波形が得られたが平均して 0.0178 sec の値を得た。これは paper-speed, および Timer の関係で周期が小さいものはシンクロ装置による方が妥当と思われる。又, 理論値との比較はおよそ 60% 実験値の方が大きく出ているが値の小さい事や, 測定誤差, 模型の製作誤差などを考慮した実験精度から言って, 比較的一致した傾向を示していると思われる。周期と次数との関係も前述の理論計算例と同傾向を示し 1 次以下急速に減少し, あとはゆるやかに静止へ向かうことを示しており, 妥当な傾向を示していると考えられる。

参 考 文 献

- S. G. Nōmachi: A note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration (The Transcript from the Memories of the Muroran Institute of Technology Vol. 5 No. 2)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: スパン方向のヒンデ結合された棒状要素による面構造の応力について

(土木学会, 第25回年次学術講演集)

- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: 矢板の側方座屈について (土木学会, 第27回年次学術講演概要集)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: スパン方向にヒンデ結合されたパイルによる平面構造について (土木学会, 北海道支部研究発表会論文集, 第27号, 昭和45年度)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: 鋼管パイル基礎の応力解析について (土木学会, 北海道支部研究発表会論文集, 第28号, 昭和46年度)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: 矢板の側方不安定構造解析について (土木学会, 北海道支部研究発表会論文集, 第29号, 昭和48年度)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: ヒンデ結合された棒状要素による平面構造応力解析について (苫小牧工業高等専門学校紀要, 第8号)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: セル型矢板構造の側方不安定解析について (土木学会第28回年次学術講演会講演概要集)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: 軸方向にヒンデ結合された鋼管よりなる基礎の応力解析について (第11回日本道路会議一般論文集)
- 能町純雄・松岡健一・沢田知之: 鋼管グイによる円形構造の応力解析について (苫小牧工業高等専門学校紀要, 第9号) (昭和48年9月27日受理)