

鋼管グイによる円形構造の応力解析について

沢 田 知 之*
能 町 純 雄**

On Stress Analysis in a Circular Struature Made of Hinge Connected Steel Piles

Tomoyuki SWADA
Sumio. G. NOMACHI

要 旨

本稿は鋼管グイが軸方向にヒンジ結合されたものを円形に配置した基礎構造物の応力挙動を、偏微分方程式で表わし、有限フーリエ変換を用いて解析し、理論の検討を行なったものである。

Synopsis

In this paper, the stress behaviour of the circular structure made of steel-piles which are connected with one another, by longwise hinge, is described in partial diffrential equations, and the equations are solved by means of Finite Fourier Transforms; so the analytical results are given an account of.

1. ま え が き

最近、多く用いられてきている鋼管グイ基礎構造物は、橋梁等の基礎として鋼管矢板セル型ウェル工法などがあるが、これらの構造物の解析法は確立されていない。本研究では軸方向にヒンジ結合の円形面構造を取り上げている。解析において、鋼管グイ要素は弾性床土にあり、任意の鋼管グイにおける鉛直方向変位、水平方向変位、軸廻りの回転変位を垂直、接線方向の力と振りモーメントのつり合いから求める。又円形とすることにより生ずる各鋼管グイの変形力を考慮している。これらのヒンジ結合点での力のつり合いを満足するように誘導された微分差分方程式を有限フーリエ変換を行ない解析を進める。これによって高次方程式が得られこの複素数解を求め、境界条件を考慮することにより、4元の連立方程式を解くことに帰着する故、各々逆変換することにより閉じた解として得ることができ、大きなマトリックス計算の必要もなく繰り返し計算による収束性を考慮することもない上、短時間の計算にて解を求め得る。尚、解析において地盤反力係数 k は一定として解析を進めている。

2. 理論式の誘導

一般図を図-1に示すが、図-2の如く任意の鋼管 $r, r+1$ に対し、垂直方向、水平方向の曲げモーメント、および振り、に關与する力 $q_r', q_r'' p'$ を考え又 p'' で表わされる水平方向の変位 ε を考慮することにより次の式が導かれる。

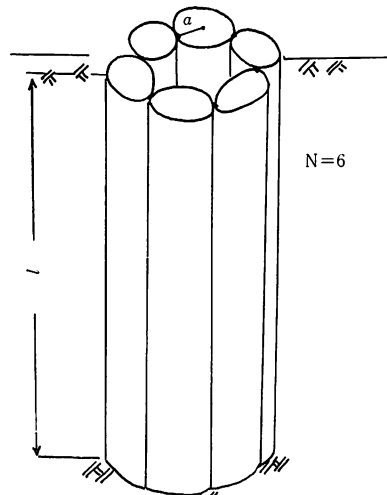
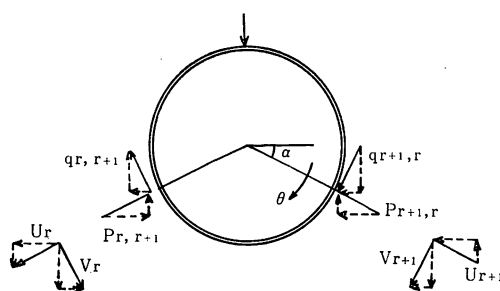


図-1

* 講師 土木工学科

** 教授 北海道大学 工学部 土木工学科

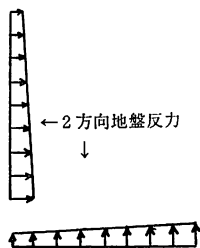


$\frac{q_r'}{2}$ ↓ 垂直方向曲げによるもの ↓ $\frac{q_r'}{2}$

↑ 垂直方向振りによるもの ↓ q_r''

$P^* \rightarrow$ 水平方向変位のみによる ← P^*

$\frac{P'}{2}$ ← 水平方向曲げ振りによる ← $\frac{P'}{2}$



図—2

$$EI \cdot \left[\frac{\{V_{r+1}(x) + V_r(x)\}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\{U_{r+1}(x) - U_r(x)\}}{2} \cdot \sin \alpha \right] = q_r' + \left[\frac{\{V_{r+1}(x) + V_r(x)\}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\{U_{r+1}(x) - U_r(x)\}}{2} \cdot \sin \alpha \right] \times k \cdot 2a \quad (1)$$

$$EI \cdot \left[\frac{\{V_{r+1}(x) - V_r(x)\}}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{\{U_{r+1}(x) + U_r(x)\}}{2} \cdot \cos \alpha \right] = P' - \left[\frac{\{V_{r+1}(x) - V_r(x)\}}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{\{U_{r+1}(x) + U_r(x)\}}{2} \cdot \cos \alpha \right] \times k \cdot 2a \quad (2)$$

$$-GJ \cdot \left\{ \frac{\dot{V}_{r+1}(x) - V_r(x)}{2a} \right\} = q_r'' \cdot 2a \cos \alpha + p' \cdot a \sin \alpha \quad (3)$$

$$\{U_{r+1}(x) - U_r(x)\} \cdot \cos \alpha + \{V_{r+1}(x) + V_r(x)\} \cdot \sin \alpha = \varepsilon \quad (4)$$

ここで(1)式は半径方向の曲げのつり合い式であり(2)式は同じく水平方向のつり合い式である。(3)式は振りによるものであり、(4)式は水平方向の鋼管の変形に関するものである。

又、

$V_r(x)$: 半径方向の変位

$U_r(x)$: 接線方向の変位

EI : 鋼管の曲げ剛性

EI' : 鋼管の厚さ方向の曲げ剛性

a : 鋼管の半径

k : 地盤反力係数

ε : 鋼管の水平変形量

GJ : 鋼管の振り剛性

一方 ε は鋼管を図-3の如く円形アーチとして解いて求める。 E はひずみエネルギーである。

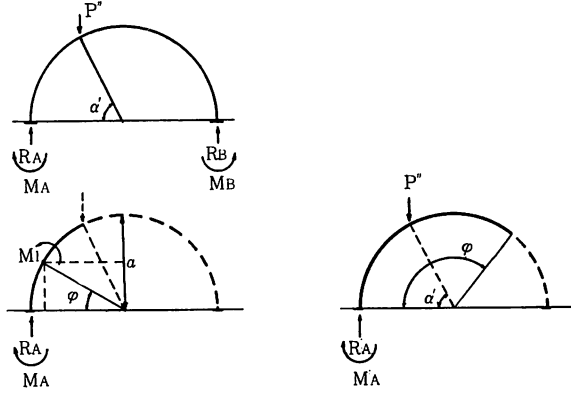
$$E = \int_0^{\alpha} \frac{M_1^2}{2EI} ds + \int_{\alpha'}^{\pi} \frac{M_2^2}{2EI} ds \quad (5)$$

$$M_1 = M_A + R_A a (1 - \cos \varphi) \quad (6)$$

$$M_2 = M_A + R_A \cdot a (1 - \cos \phi - P'' a (\cos \alpha' - \cos \phi)) \quad (7)$$

$\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$, M_A , R_A はパイルの荷重点における反力モーメント及び反力を表わす。

以上整理すると(8)式の如く示される。



図—3

$$\begin{aligned} \epsilon &= 2 \times \frac{dE}{dP''} \\ &= \frac{a \cdot P''}{EI'} \left[2\pi F_1^2 + 2\pi F_1 \cdot F_2 + \frac{3}{4} F_3^2 - 2a F_1 \{ \cos \alpha' \cdot (\pi - \alpha') + \sin \alpha' \} - a F_1 \cdot \{ \cos \alpha' (\pi - \alpha') \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \sin 2\alpha' + \sin \alpha' + \frac{1}{2} (\pi - \alpha') \} + 2a^2 \left\{ \cos^2 \alpha' (\pi - \alpha') + \frac{5}{4} \sin^2 \alpha' - \frac{(\pi - \alpha')}{2} \right\} \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[\left(\frac{\pi a}{16EI'} \right)^2 \cdot a \{ (1 + \cos \alpha') \cdot \left(\frac{3}{2} \pi - \frac{3}{4} \alpha' - \sin \alpha' \right) \cos \alpha' \cdot (\pi - \alpha') + \frac{\pi - \alpha'}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha' \} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\pi a}{8EI'} \right)^2 a (1 + \cos \alpha) \right] \Bigg/ \left\{ \left(\frac{3\pi a}{8EI'} \right)^2 - \left(\frac{a}{8EI'} \right)^2 \pi a' \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \left[\left(\frac{a}{8EI'} \right)^2 a \pi \alpha' \cdot (1 + \cos \alpha) - \frac{3}{16} \left(\frac{\pi a}{EI'} \right)^2 a \left\{ (1 + \cos \alpha') \cdot \left(\frac{3}{2} \pi - \frac{3}{4} \alpha' - \sin \alpha' \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \alpha' \cdot (\pi - \alpha') + \frac{\pi - \alpha'}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha'}{4} \right\} \right] \Bigg/ \left\{ \left(\frac{3}{8} \frac{\pi a}{EI'} \right)^2 - \left(\frac{a}{8EI'} \right)^3 \cdot \pi a' \right\} \end{aligned}$$

$$F_3 = a(1 + \cos \alpha') + F_2 - F_1$$

また、次の如くの関係がある。

$$q_{r+1, r} \cdot \cos \alpha - P_{r+1, r} \cdot \sin \alpha = \frac{q_r'}{2} + q_r'' \quad (9)$$

$$q_{r+1, r} \cdot \sin \alpha + P_{r+1, r} \cdot \cos \alpha = P'' + \frac{P'}{2} \quad (10)$$

$$-q_{r, r+1} \cdot \cos \alpha - P_{r, r+1} \cdot \sin \alpha = \frac{q_r'}{2} - q_r' \quad (11)$$

$$q_{r, r+1} \cdot \sin \alpha - P_{r, r+1} \cdot \cos \alpha = P'' + \frac{P'}{2} \quad (12)$$

節点条件は次の如くである。

$$q_{r,r+1}=q_{r,r-1} \quad (13)$$

$$P_{r,r+1}=P_{r,r-1} \quad (14)$$

故に、(1)~(4)より q' , p' , q'' , p'' を変位 U , V で表わし、その各々を(9)~(12)より求まる $q_{r,r+1}$, $q_{r,r-1}$, $p_{r,r+1}$, $p_{r,r-1}$ に代入し、(13), (14)なる節点条件式に代入し、次の(15), (16)等の如くの置き換えを行なう。

$$V_r(x)=\sum_i V_i(x) \cdot \cos \frac{2\pi i}{n} r \quad (15)$$

$$U_{r+1}(x)=\sum_i U_i(x) \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} (r+1) \quad (16)$$

よって加法定理で展開した式を有限フーリエ - Sine 変換を行なって整理すると次の如く示される。

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \left[A_{y1} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 + A_{y2} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + A_{y3} \right], & \left[A_{y4} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + A_{y5} \right] \\ \left[B_{y1} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^4 + B_{y2} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + B_{y3} \right], & \left[B_{y4} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) + B_{y5} \right] \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} \tilde{V}_i(x) \\ \tilde{U}_i(x) \end{array} \right| \\ &= \left| \begin{array}{cc} \left[a1 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 + a11 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], & (-1)^m \left[a2 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 + a22 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], \\ \left[b1 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 + b11 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], & (-1)^m \left[b2 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 + b22 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], \end{array} \right| \\ & \quad \left[a3 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], \quad (-1)^m \left[a4 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], \quad \left[a5 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \right], \quad (-1)^m \left[a6 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \right], \\ & \quad \left[b3 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], \quad (-1)^m \left[b4 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], \quad \left[b5 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \right], \quad (-1)^m \left[b6 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^3 \right], \\ & \left| \begin{array}{cc} \left[a7 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], & (-1)^m \left[a8 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right] \\ \left[b7 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right], & (-1)^m \left[b8 \left(\frac{m\pi}{\ell} \right) \right] \end{array} \right| \times [V_i(0), V_i(\ell), \dot{V}_i(0), \dot{V}_i(\ell), \\ & U_i(0), U_i(\ell), \ddot{U}_i(0), \ddot{U}_i(\ell)]^T \quad (17) \end{aligned}$$

ここで

$$A_{y1} = \frac{EI}{4} \xi_1 \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \quad A_{y2} = -\frac{GJ}{4a^2} \tan \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$A_{y3} = \left(\frac{K}{4} \xi_1 - \frac{EI'}{AA} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right) \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$A_{y4} = -\frac{EI}{4} (D1_i - \sin^2 \alpha \cdot DI)$$

$$A_{y5} = \frac{EI'}{AA} \cos^2 \alpha \cdot DI - \frac{K}{4} (2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot D1_i)$$

$$B_{y1} = -\frac{EI}{4} \cos^2 \alpha \cdot D1_i \quad B_{y2} = \frac{GJ}{4a^2} DI$$

$$B_{y3} = -D1_i \left(\frac{K}{4} \cos^2 \alpha + \frac{EI'}{AA} \sin^2 \alpha \right)$$

$$B_{y4} = \frac{EI}{4} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$B_{y5} = \left(\frac{K}{4} - \frac{EI'}{AA} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$a1 = -a6 = -a3 = a4 = -\frac{EI}{4} \xi_1 \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$a11 = -a22 = \frac{GJ}{4a^2} \tan \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$a5 = -a6 = -a7 = a8 = \frac{EI}{4} (D1_i - \sin^2 \alpha \cdot DI)$$

$$b1 = -b2 = -b3 = b4 = \frac{EI}{4} \cos^2 \alpha \cdot D1_i$$

$$b11 = -b22 = -\frac{GJ}{4a^2} \cdot DI$$

$$b5 = -b6 = -b7 = b8 = -\frac{EI}{4} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n}$$

$$\tilde{V}_i(x) = \int_0^{\ell} V_i(x) \sin \frac{m\pi}{\ell} x, \quad \tilde{U}_i(x) = \int_0^{\ell} U_i(x) \sin \frac{m\pi}{\ell} x$$

$$\xi_1 = \tan \alpha \cdot \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$D1_i = \cos \frac{2\pi i}{n} + 1 \quad DI = \cos \frac{2\pi i}{n} - 1$$

$$K = 2ak$$

又(17)式中における $V_i(0) \sim \ddot{U}_i(\ell)$ なる column は境界条件を満足する定数である。

今 $x=0$ 端で自由, $x=\ell$ 端で固定の構造物を考えると

$$V_i(\ell) = U_i(\ell) = 0 \quad (18)$$

$$\dot{V}_i(0) = \ddot{U}_i(0) = 0 \quad (19)$$

よって上の式を(17)式に代入し, 次に示す(20)~(23)の Fourier-Sine 逆変換および三角級数公式により整理すると, 理論式は(24), (25)の如くの閉じた解で求められる。

$$V_i(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{U}_i(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx \quad (20)$$

$$U_i(x) = \frac{2}{\ell} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{U}_i(x) \cdot \sin \frac{m\pi}{\ell} x \cdot dx \quad (21)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \cdot \sin mx}{m^2 - a^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin a(\pi - x)}{\sin a\pi} \quad (22)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{m \cdot \sin mx}{m^2 - a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin a\pi x}{\sin a\pi} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \therefore V_i(x) = & \sum_{j=1}^4 \left[\{A_{1j}V_i(0) + A_{2j}U_i(0)\} \cdot \frac{\sin \gamma\pi(1-\xi)}{\sin \gamma\pi} + \{A_{3j} \cdot \dot{V}_i(\ell) \right. \\ & \left. + A_{4j} \cdot \ddot{U}_i(\ell)\} \cdot \frac{\sin \gamma\pi\xi}{\sin \gamma\pi} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \therefore U_i(x) = & \sum_{j=1}^4 \left[\{A_{5j} \cdot V_i(0) + A_{6j} \cdot V_i(0)\} \cdot \frac{\sin \gamma\pi(1-\xi)}{\sin \gamma\pi} + \{A_{7j} \cdot \dot{V}_i(\ell) \right. \\ & \left. + A_{8j} \cdot \ddot{U}_i(\ell)\} \cdot \frac{\sin \gamma\pi\xi}{\sin \gamma\pi} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

ここで γ は(7)式の分母の m^2 の4次式の根であり $A_{1j} \sim A_{8j}$ は γ による各々の部分分数の係数である。
又、 $\xi = \frac{x}{\ell}$ である。

3. 境界条件式

$x = \ell$ 端が固定であることより

$$\dot{V}_i(\ell) = 0 \quad (26)$$

$$\dot{V}_i(\ell) = 0 \quad (27)$$

$x = 0$ 端での垂直，水平方向の剪断力の均り合い式

$$\frac{EI}{2} \cos \alpha \cdot D_{1i} \cdot \ddot{V}_i(0) + EI \cdot \sin \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \ddot{U}_i(0) + \frac{GI}{2a^2} DI \cdot \dot{V}_i(0) + P_r = 0 \quad (28)$$

$$\frac{EI}{2} \sin \alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \cdot \ddot{V}_i(0) - \frac{EI}{2} \cos \alpha \cdot \cos \frac{2\pi i}{n} \cdot \ddot{U}_i(0) = 0 \quad (29)$$

よって(26)～(29)における境界条件式を満足するように
(7)の境界値を定めると，(24)，(25)，の各式より，たわみ
 $V_i(x)$ ， $U_i(x)$ が得られる。

4. 数値計算例

図-4 にフローチャートを示す。又計算に用いたデータは

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$G = 8.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\ell = 100 \text{ cm (スパン長)}$$

$$a = 2.0 \text{ cm (管の外径)}$$

$$a' = 1.9 \text{ cm (管の内径)}$$

$$k = 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 5.0, 10.0, 15.0, 20.0$$

$$\text{kg/cm}^3$$

$$P = 10 \text{ kg}$$

$$N = 9, 8 \text{ (本)}$$

計算結果を図4～11に示す。

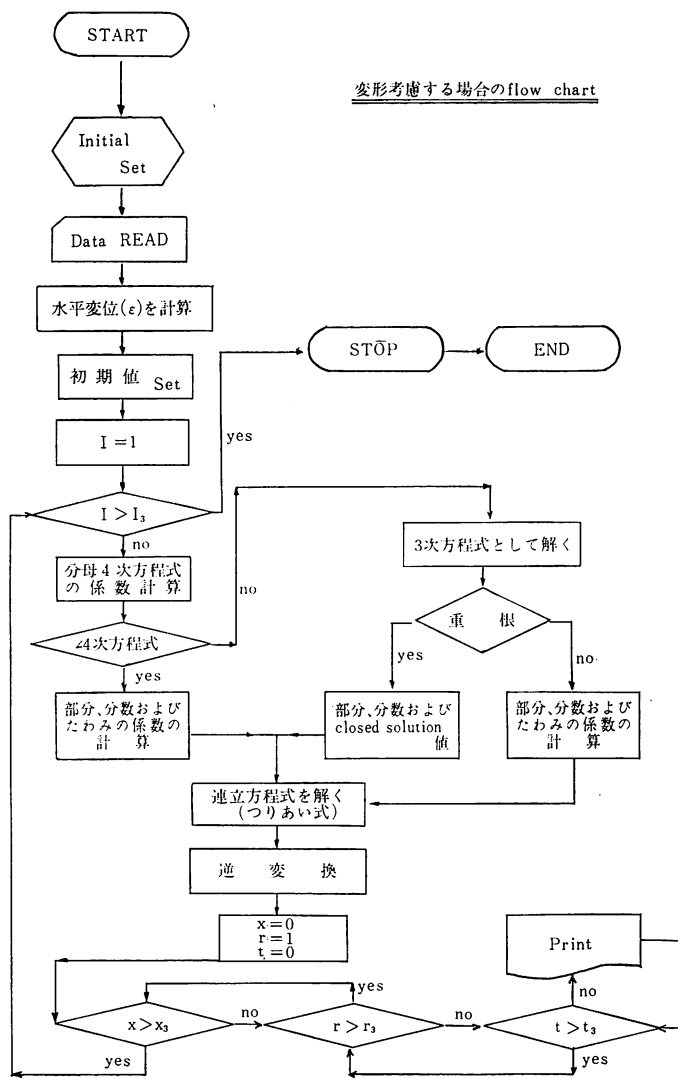


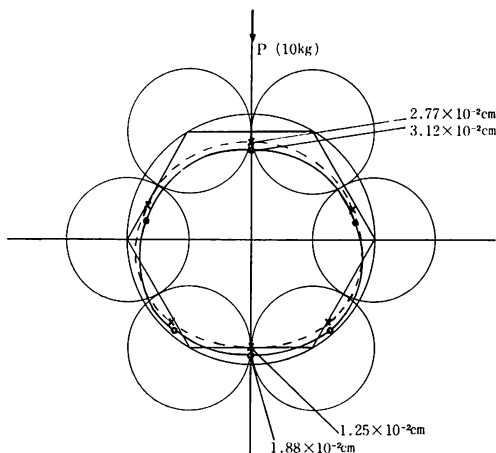
図-4

N=6

K=5.0

変位図 at x=0cm

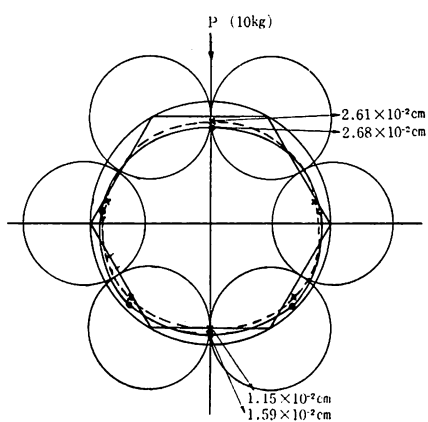
変形考慮 (K=値1方向) ○ —
変形考慮 (K=値2方向) × - - -



図—5

変位図 at x=0cm

変形考慮 (K=値1方向) ○ —
変形考慮 (K=値2方向) × - - -



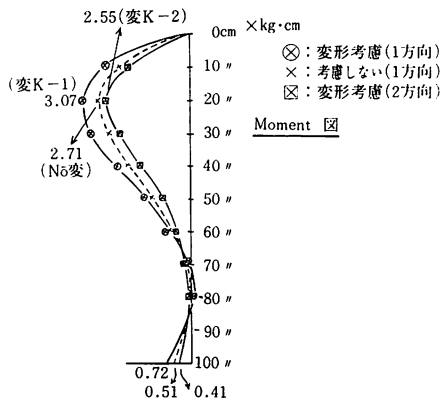
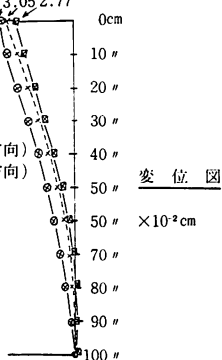
図—7

N=6

K=5.0

(変1) (No変1) (変2)
3.12 3.05 2.77

変形考慮 (K=値1方向)
変形考慮 (K=値2方向)
考慮しない場合



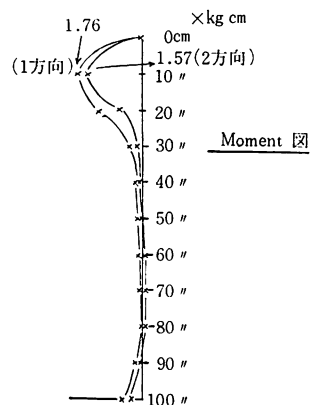
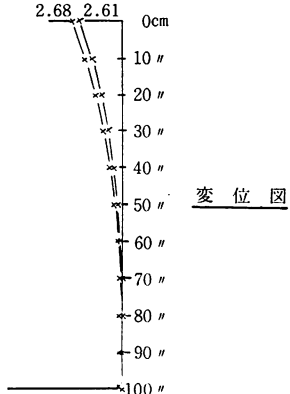
図—6

N=6

K=10.0

変形考慮 (1方向)
変形考慮 (2方向)

(1方向) (2方向) × 10^-2 cm



図—8

N = 8
K = 10.0

変形考慮 (K-値 1 方向) ○ —
変形考慮 (K-値 2 方向) × ----

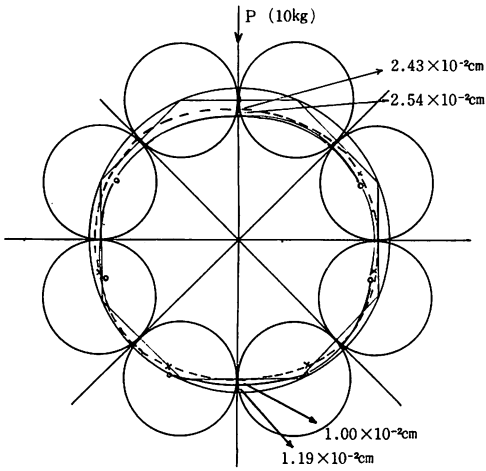
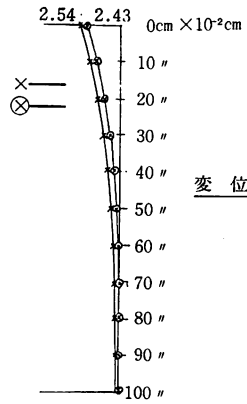


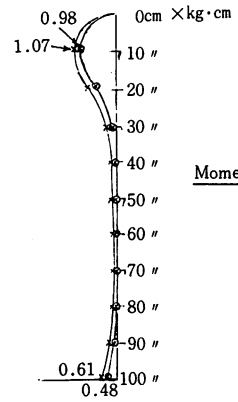
図-9

N=8
K=10.0

変形考慮 (K-値 1 方向) × —
変形考慮 (K-値 2 方向) ⊗ —



変位図



Moment図

図-10

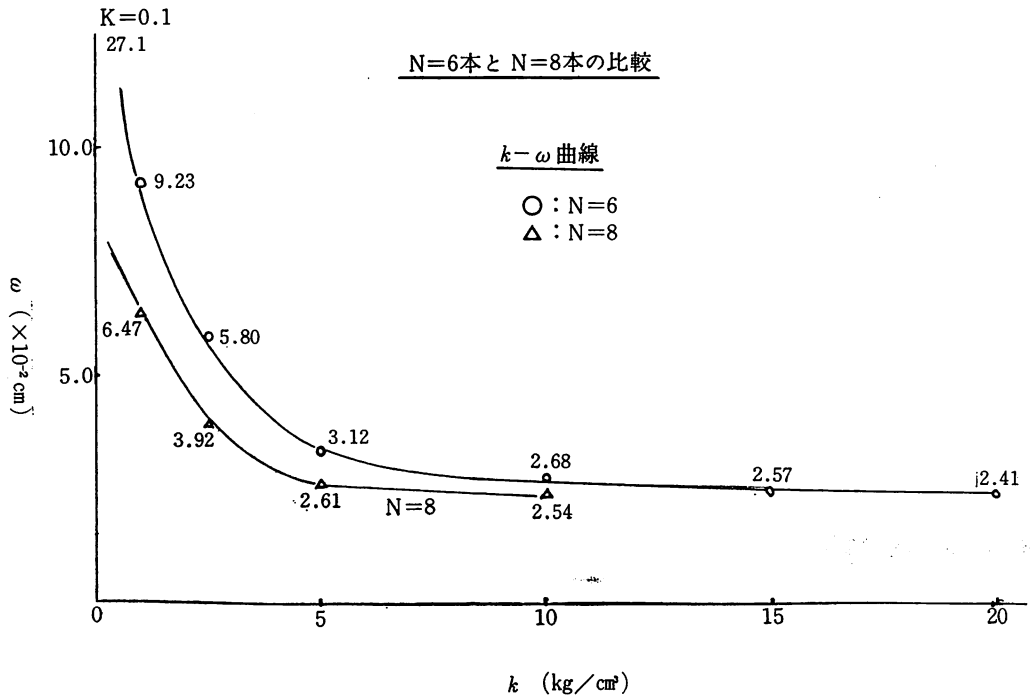


図-11

5. 考 察

パイルを円形に配置した場合の解析は平面構造解析を発展させたものであるが、パイルの変形を考慮し、解析を進めたものである。計算結果より、次の如くの特長が見い出された。尚、比較考察したものは、パイルの厚さ方向の剛性を大きくしてパイルの変形を考慮しないものとしたもの、およびパイルの変形を考慮したもので1方向に地盤反力係数(K-値)を考慮したものと、2方向に考慮したものを、各々、K-値を変えて検討し、パイルの本数との関連も比較した。

- 図-5～10および図-11より変位はK-値が小さい程大きくなる傾向が見られる。これはK-W曲線(図-11)に顕著である。又、この図より管の本数の多い方が変位が小さい傾向を示し、これは $K=0.0$ (kg/cm^3) 時の1本の管の時の値 ($P=10\text{kg}$, の $6.8 \times 10^{-1} \text{cm}$) と比して、妥当な傾向と考えられる。
- 応力は、弾性床土故、極値を持つが、パイルの端から大体0.1～0.3 ℓ の間に生じる傾向を示している。これは、石狩河口橋(鋼管矢板セル型ウェル法)の場合およそ12.5m/41.0m $\approx$ 0.31 ℓ 地点、又長泥橋(青森県)の基礎グイ実験(長さ52mの鋼管7本の斜組グイ方式)では0.1～0.15 ℓ (4.5～7m)に最大を示しており同じ傾向を示していると思われる。
- 図5～図10に見られるように、同じK-値における変形考慮したもの(K-値1方向)と変形考慮しないもの(K-値1方向)、およびK-値を2方向に考慮したものの比較は、1方向にK-値を考慮し変形を考慮したもの、次に2方向(垂直、水平方向)にK-値を考慮して変形を考慮したものの順にあらわれることを示している。一方、パイルの変形を考慮したものと、考慮しないものとの差異は小さい故、変形を考慮しない容易な計算法でも近似値は得られると言えよう。

- 謝辞：終りに本研究に常日頃、協力いただいた室蘭工業大学松岡健一助教授に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 能町純雄・松岡健一・沢田知之
：スパン方向のヒンジで結合された棒状要素による面構造の応力について
(土木学会第25回年次学術講演会講演集)
- 能町・松岡・沢田：スパン方向にヒンジで結合されたパイルによる平面構造について
(土木学会北海道支部研究発表会論文集第27号)
- 能町・松岡・沢田：円形に配置された鋼管パイルの基礎の応力計算
(土木学会第26回年次学術講演会講演集)
- 能町・松岡・沢田：鋼管パイル基礎の応力解析について
(土木学会北海道支部研究発表会論文集第28号)
- 能町・松岡・沢田：矢板の側方座屈について
(土木学会第27回年次学術講演会講演概要集)
- 能町・松岡・沢田：矢板の側方不安定構造解析について
(土木学会北海道支部研究発表会論文集第29号)
- 能町・松岡・沢田：ヒンジ結合された棒状要素による平面構造応力解析について
(苫小牧工業高等専門学校紀要第8号)
- 能町・松岡・沢田：セル型矢板構造の側方不安定解析について
(土木学会第28回年次学術講演会講演概要集)
- 能町・松岡・沢田：軸方向にヒンジ結合された鋼管よりなる基礎の応力解析について
(第11回日本道路会議一般論文集)
- 能町・松岡・沢田：軸方向に Hinge で結合された棒状要素による平面構造の固有振動解析について
(苫小牧工業高等専門学校紀要第9号)

(昭和48年11月30日受理)